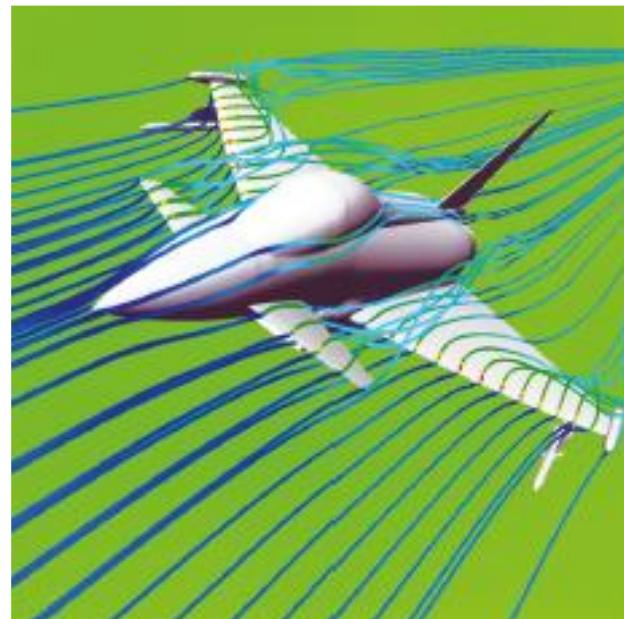


SEM0403 Fundamentos de Mecânica dos Fluidos

Análise diferencial dos escoamentos – Equações de Navier-Stokes

Oscar Rodriguez

Universidade de São Paulo



Equações do movimento para uma partícula de fluido

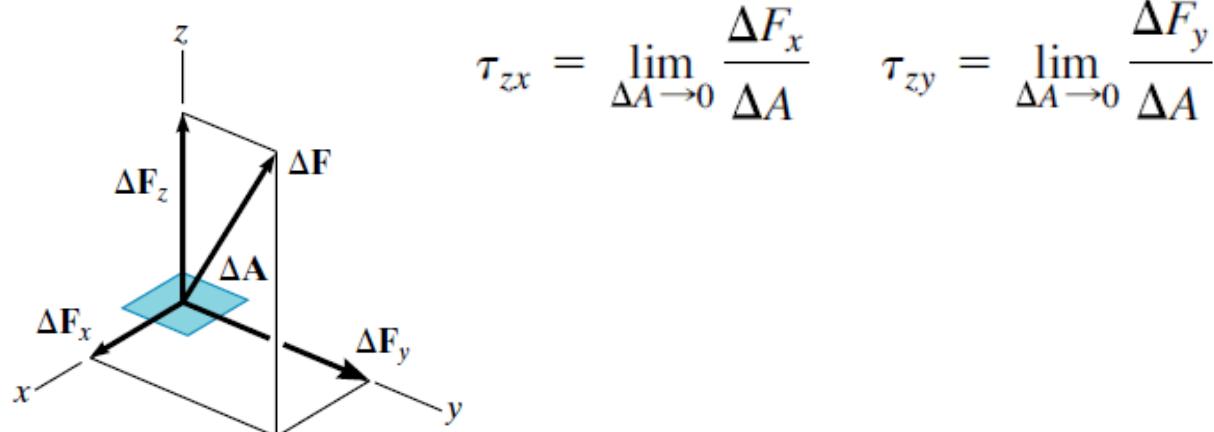
Aplicaremos a segunda lei do movimento de Newton a um elemento fluido diferencial, expressando o resultado em sua forma mais geral.

- ✓ Como vemos na figura, uma força $\Delta\mathbf{F}$, que atua numa área ΔA , terá um componente normal ΔF_z e dois componentes de cisalhamento ΔF_x e ΔF_y . A tensão é o resultado desses *componentes de força na superfície*.

O componente normal cria uma ***tensão normal*** sobre a área:

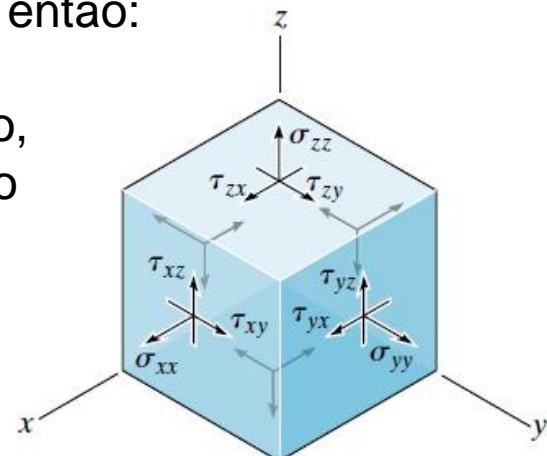
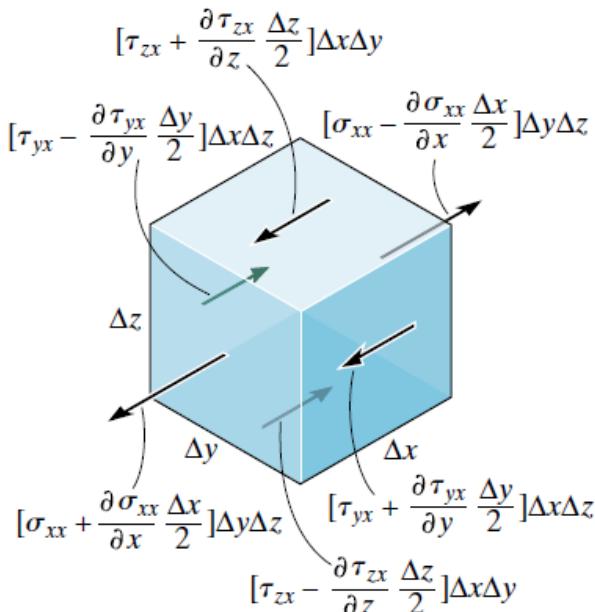
$$\sigma_{zz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A}$$

e os componentes de cisalhamento criam ***tensões de cisalhamento***.



Equações do movimento para uma partícula de fluido (cont.)

- ✓ Se agora generalizarmos essa ideia e considerarmos as forças que atuam sobre as seis faces de um elemento de volume do fluido, então:
- ✓ Considere o diagrama de corpo livre da partícula de fluido, que mostra apenas as forças dos componentes de tensão que atuam na direção x :



- ✓ A **força de superfície** resultante na direção x é:

$$\begin{aligned}
 (\Delta F_x)_{fs} = & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z \\
 & + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \Delta z - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \Delta z \\
 & + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y
 \end{aligned}$$

Equações do movimento para uma partícula de fluido (cont.)

- ✓ Simplificando, temos a **força de superfície** na direção x:

$$(\Delta F_x)_{fs} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

- ✓ Há também a **força do campo** devida ao peso da partícula. Se Δm é a massa da partícula, essa força é $\Delta W = (\Delta m)g = \rho g \Delta x \Delta y \Delta z$.
- ✓ Assim, a força peso na direção x é dada por:

$$\Delta W_x = \rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z$$

- ✓ Portanto, a soma de todos os componentes de força de campo e de superfície atuando sobre a partícula de fluido na direção x é:

$$\Delta F_x = \left(\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Obs.: analogamente para as outras direções coordenadas.

Equações do movimento para uma partícula de fluido (cont.)

- ✓ Finalmente, Aplicamos a segunda lei do movimento de Newton à partícula de fluido, onde $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$, então a derivada material é usada para determinar a aceleração:

$$\Sigma \mathbf{F} = \Delta m \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right]$$

- ✓ Quando substituirmos as forças externas, dividimos pelo volume $\Delta x \Delta y \Delta z$ e depois usarmos $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$, os componentes x, y, z dessa equação tornam-se:

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

Estas são as equações diferenciais escalares da **quantidade de movimento** para uma partícula de fluido.

Equações de Euler

- ✓ Se considerarmos o fluido como sendo um **fluido perfeito**, então não haverá tensão de cisalhamento viscoso sobre a partícula de fluido, somente tensões normais.
- ✓ Como as tensões normais foram todas definidas como positivas (figura anterior) e para fora e, por convenção, pressão positiva produz uma **tensão compressiva**, então $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$.
- ✓ Como resultado, temos as **equações do movimento de Euler**:

$$\begin{aligned}\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

Equações de Navier-Stokes

- ✓ Os **fluidos reais** são viscosos, de modo que um conjunto mais preciso de equações usadas para descrever o escoamento deverá incluir também as forças viscosas.
- ✓ Para buscar uma solução geral, expressaremos os termos de **tensão cisalhante** das equações da quantidade de movimento relacionando os **componentes de tensão** com a viscosidade do fluido e os **gradientes de velocidade**.
- ✓ Para o caso especial do escoamento incompressível ($\rho = \text{cte.}$) e fluido newtoniano, as tensões normais e de cisalhamento estão linearmente relacionadas às suas taxas de deformação associadas, e assim:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

Equações de Navier-Stokes (cont.)

Se substituirmos essas equações nos componentes de tensão nas equações diferenciais de quantidade de movimento e simplificarmos, resultam as célebres **Equações de Navier-Stokes** da mecânica dos fluidos:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

que, juntamente com a equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

fornecem um meio de obter os componentes de velocidade u , v , w e a pressão p dentro do escoamento.

Equações de Navier-Stokes (cont.)

Em notação vetorial, as equações de Navier-Stokes assumem a seguinte forma (M. Navier, 1827, e G. Stokes, 1845):

$$\underbrace{\rho \frac{D\vec{V}}{Dt}}_{\text{massa por unidade de volume vezes aceleração (termos convectivos ou de transporte de q.d.m.)}} = \underbrace{\rho \vec{g}}_{\text{força gravitacional por unidade de volume (força de campo)}} - \underbrace{\nabla p}_{\text{força de pressão por unidade de volume (força de superfície)}} + \underbrace{\mu \nabla^2 \vec{V}}_{\text{força viscosa por unidade de volume (termo de difusão de q.d.m.)}}$$

Para escoamentos inviscidos ($\mu = 0$), temos às equações de Euler (1755):

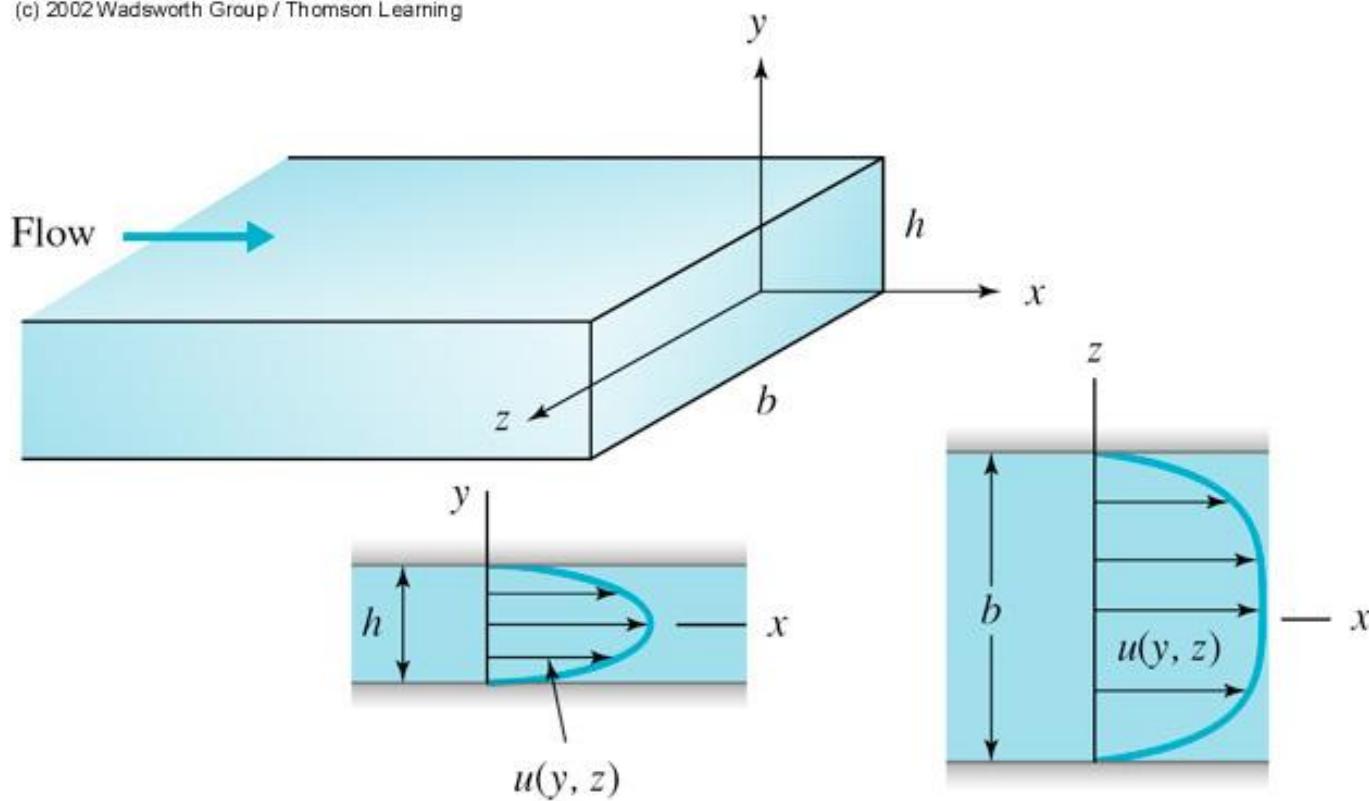
$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p$$

E da integração da equação de Euler, para regime permanente e 2-D, chega-se à equação de Bernoulli.

Exemplo 1

Simplifique as equações de Navier-Stokes para a componente x para um escoamento em regime permanente em um canal horizontal e retangular, supondo todas as linhas de corrente paralelas às paredes. considere a direção x como a direção do escoamento

(c) 2002 Wadsworth Group / Thomson Learning



Exemplo 1(cont.)

Para a solução:

Equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Equações de Navier-Stokes:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$