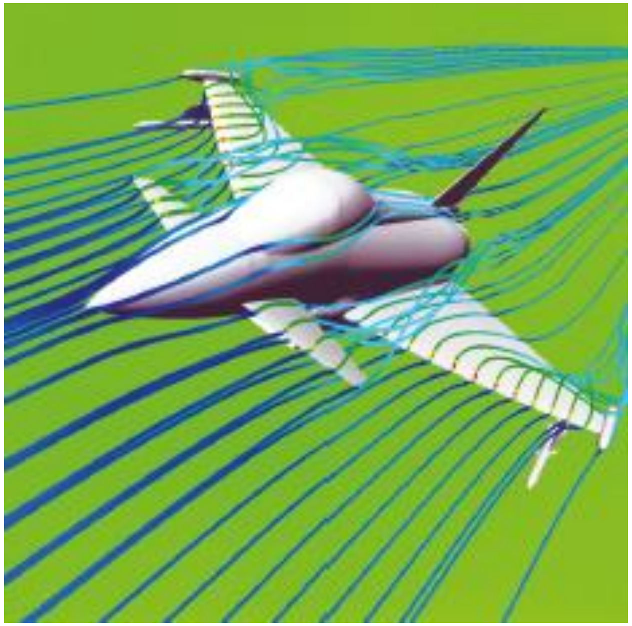
SEM0403 Fundamentos de Mecânica dos Fluidos

Análise diferencial dos escoamentos – Equações de Navier-Stokes

Oscar Rodriguez

Universidade de São Paulo



Equações do movimento para uma partícula de fluido

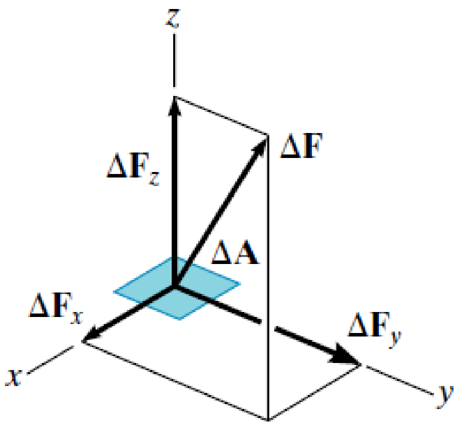
Aplicaremos a segunda lei do movimento de Newton a um elemento fluido diferencial, expressando o resultado em sua forma mais geral.

- ✓ Como vemos na figura, uma força Δ**F,** que atual numa área ΔA, terá um componente normal $\Delta \mathbf{F}_z$ e dois componentes de cisalhamento $\Delta \mathbf{F}_x$ e $\Delta \mathbf{F}_y$. A tensão é o resultado desses *componentes de força na superfície.*

O componente normal cria uma ***tensão normal*** sobre a área:

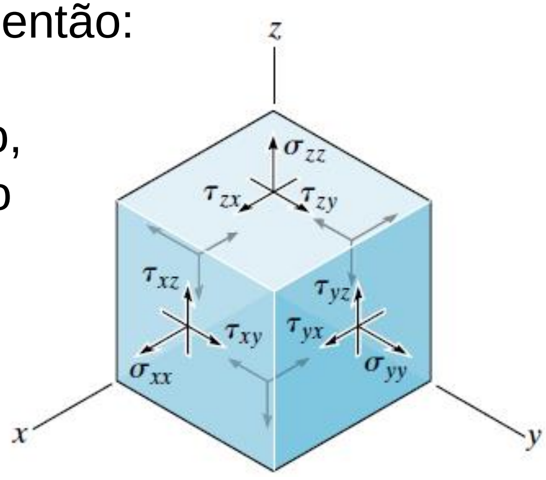
$$\sigma_{zz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A}$$

e os componentes de cisalhamento criam ***tensões de cisalhamento.***

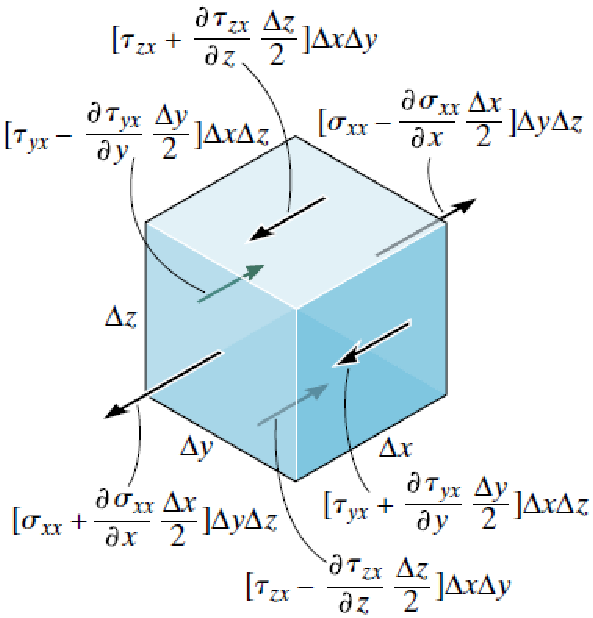


$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} \qquad \tau_{zy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A}$$

- ✓ Se agora generalizarmos essa ideia e considerarmos as forças que atuam sobre as seis faces de um elemento de volume do fluido, então:



- ✓ Considere o diagrama de corpo livre da partícula de fluido, que mostra apenas as forças dos componentes de tensão que atuam na direção *x:*



- ✓ A ***força de superfície*** resultante na direção *x* é:

$$(\Delta F_x)_{\mathrm{fs}} = \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y\ \Delta z - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y\ \Delta z$$

$$+ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x\ \Delta z - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x\ \Delta z$$

$$+ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\ \Delta y - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\ \Delta y$$

Equações do movimento para uma partícula de fluido (cont.)

- ✓ Simplificando, temos a ***força de superfície*** na direção x:

$$(\Delta F_x)_{\text{fs}} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$$

- ✓ Há também a ***força do campo*** devida ao peso da partícula. Se Δm é a massa da partícula, essa força é $\Delta W = (\Delta m)g = \rho g\ \Delta x\ \Delta y\ \Delta z.$

- ✓ Assim, a força peso na direção x é dada por:

$$\Delta W_x = \rho g_x\ \Delta x\ \Delta y\ \Delta z$$

- ✓ Portanto, a soma de todos os componentes de força de campo e de superfície atuando sobre a partícula de fluido na direção x é:

$$\Delta F_x = \left(\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$$

Obs.: analogamente para as outras direções coordenadas.

Equações do movimento para uma partícula de fluido (cont.)

- ✓ Finalmente, Aplicamos a segunda lei do movimento de Newton à partícula de fluido, onde **V** = **V**(x, y, z, t), então a derivada material é usada para determinar a aceleração:

$$\Sigma \mathbf{F} = \Delta m \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = (\rho \Delta x \, \Delta y \, \Delta z)\left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\right]$$

- ✓ Quando substituirmos as forças externas, dividimos pelo volume $\Delta x \, \Delta y \, \Delta z$ e depois usarmos **V** = u**i** + v**j** + w**k**, os componentes x, y, z dessa equação tornam-se:

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Estas são as equações diferenciais escalares da ***quantidade de movimento*** para uma partícula de fluido.

Equações de Euler

- ✓ Se considerarmos o fluido como sendo um ***fluido perfeito***, então não haverá tensão de cisalhamento viscoso sobre a partícula de fluido, somente tensões normais.
- ✓ Como as tensões normais foram todas definidas como positivas (figura anterior) e para fora e, por convenção, pressão positiva produz uma *tensão compressiva*, então $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$.
- ✓ Como resultado, temos as ***equações do movimento de Euler***:

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Equações de Navier-Stokes

- ✓ Os ***fluidos reais*** são viscosos, de modo que um conjunto mais preciso de equações usadas para descrever o escoamento deverá incluir também as forças viscosas.

- ✓ Para buscar uma solução geral, expressaremos os termos de ***tensão cisalhante*** das equações da quantidade de movimento relacionando os **componentes de tensão** com a viscosidade do fluido e os ***gradientes de velocidade***.

- ✓ Para o caso especial do escoamento incompressível (*ρ = cte.)* e fluido newtoniano, as tensões normais e de cisalhamento estão linearmente relacionadas às suas taxas de deformação associadas, e assim:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Se substituirmos essas equações nos componentes de tensão nas equações diferenciais de quantidade de movimento e simplificarmos, resultam as célebres ***Equações de Navier-Stokes*** da mecânica dos fluidos:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

que, juntamente com a equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

fornecem um meio de obter os componentes de velocidade *u*, *v*, *w* e a pressão *p* dentro do escoamento.

Em notação vetorial, as equações de Navier-Stokes assumem a seguinte forma (M. Navier, 1827, e G. Stokes, 1845):

$$\underbrace{\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}}_{\substack{\text{massa por unidade}\\ \text{de volume vezes}\\ \text{aceleração}\\ \text{(termos convectivos}\\ \text{ou de transporte de q.d.m.)}}} = \underbrace{\rho\vec{g}}_{\substack{\text{força gravitacional}\\ \text{por unidade de}\\ \text{volume}\\ \text{(força de campo)}}} - \underbrace{\nabla p}_{\substack{\text{força de pressão}\\ \text{por unidade de}\\ \text{volume}\\ \text{(força de superfície)}}} + \underbrace{\mu\nabla^2\vec{V}}_{\substack{\text{força viscosa por}\\ \text{unidade de}\\ \text{volume}\\ \text{(termo de difusão de}\\ \text{q.d.m.)}}}$$

Para escoamentos invíscidos ($\mu = 0$), temos às <u>equações de Euler (</u>1755):

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{g} - \nabla p$$

E da integração da equação de Euler, para regime permanente e 2-D, chega-se à <u>equação de Bernoulli</u>.

Exemplo 1

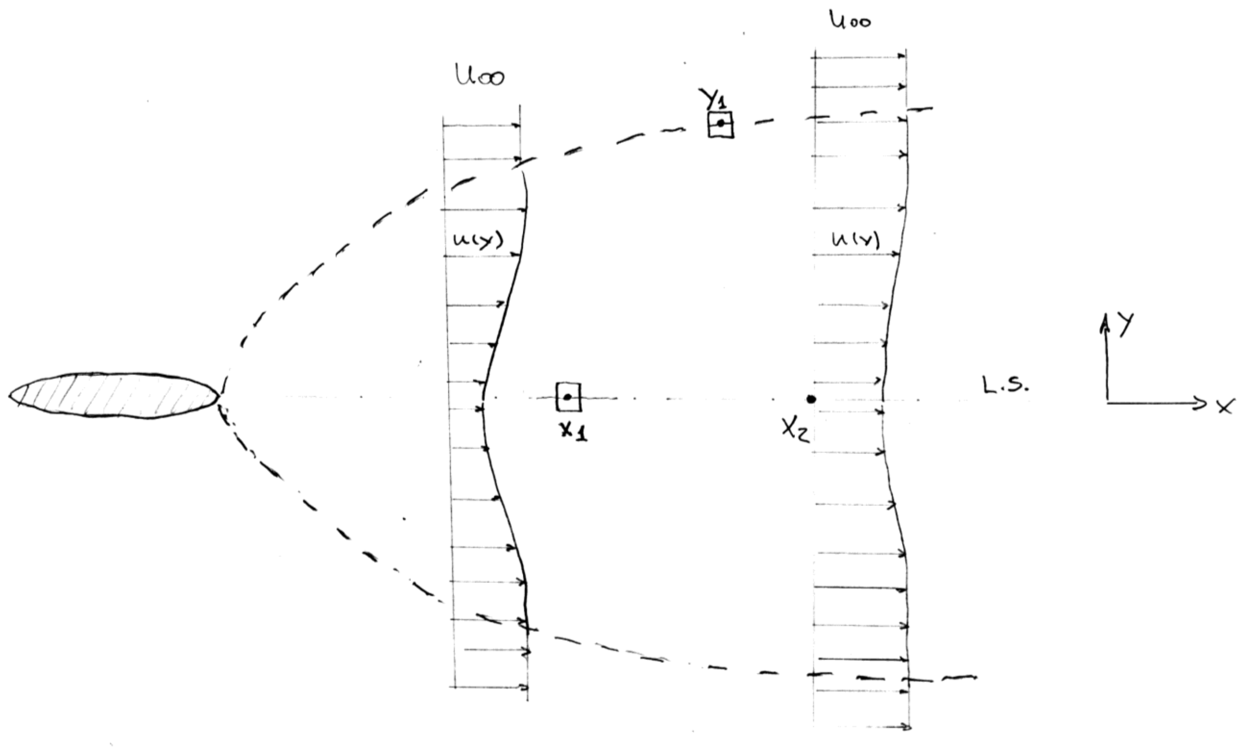
O perfil de velocidades na esteira de um aerofólio é mostrado na figura do problema.

(a) Mostre qualitativamente a variação da velocidade u ao longo da linha de centro, de imediatamente a montante do aerofólio até o infinito.

(b) Para uma localização x, distante do aerofólio, esboce qualitativamente *v* em função de y.

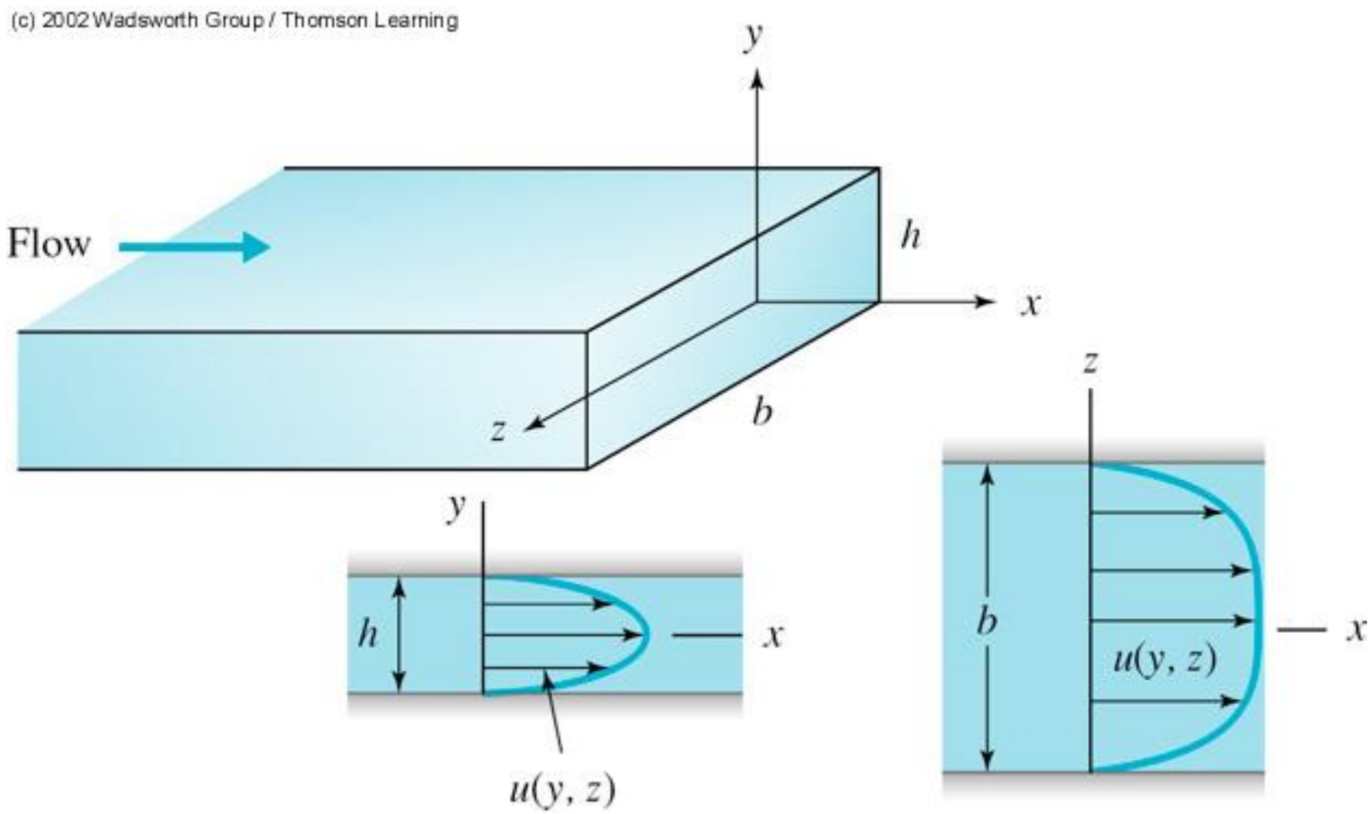
(c) Através de medidas experimentais é conhecido que o gradiente longitudinal ao longo da linha de centro é du/dx = 36 seg-1. Estime a magnitude da velocidade v em y = -0.12 pol abaixo da linha de centro.

(d) Para a partícula localizada em x_1 mostre qual deve ser sua forma quando atingir x_2.



Exemplo 2

Simplifique as equações de Navier-Stokes para a componente x para um escoamento em regime permanente em um canal horizontal e retangular, supondo todas as linhas de corrente paralelas às paredes. considere a direção x como a direção do escoamento



Exemplo 1(cont.)

Para a solução:

Equação da continuidade

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0}$$

Equações de Navier-Stokes:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$