

Mecânica dos Fluidos

Notas de Aulas – SEM 5749

Março - 2020

Oscar M. H. Rodriguez
Ricardo Pereira de Avila

São Carlos, SP

Capítulo 1

Sumário de Notação Vetorial e Tensorial

Bibliografia recomendada: [3] e [5].

Grandezas Físicas em Mecânica dos Fluidos

a) **Escalares** (tensor de ordem zero)

Exs: Temperatura, energia, volume.

b) **Vetoriais** (Tensores de 1ª ordem)

Exs: Velocidade, quantidade de movimento, aceleração, força.

c) **Tensoriais** (tensores de 2ª ordem)

Exs: Tensor das tensões, tensor taxa de deformação.

Tipos de Operações entre Vetores e Tensores

São as seguintes:

- a) **Produto escalar (ou produto ponto):** \cdot ;
- b) **Produto duplo ponto:** $:$;
- c) **Produto vetorial (ou produto cruz):** \times ;

e ainda, como resultado da operação:

- a) **Escalar:** $()$;
- b) **Vetor:** $[]$;
- c) **Tensor:** $\{ \}$;

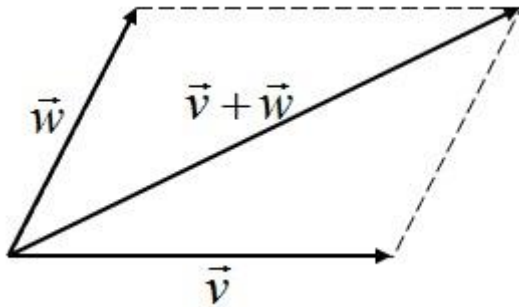
Sinal da Operação (produto)	Ordem do resultado
Nenhum	\sum
\times	$\sum - 1$
\cdot	$\sum - 2$
$:$	$\sum - 4$

Exs:

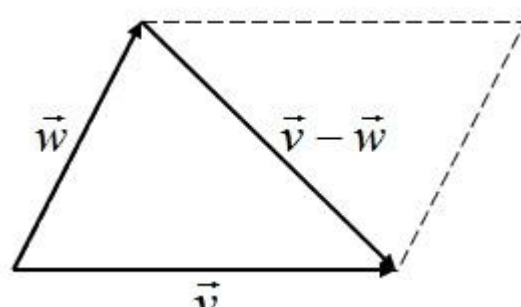
1. $\{s \tau\} \rightarrow \sum \rightarrow 0+2=2 \rightarrow$ Tensor;
2. $\{\vec{v} \vec{w}\} \rightarrow \sum \rightarrow 1+1=2 \rightarrow$ Tensor;
3. $[\vec{v} \times \vec{w}] \rightarrow \sum - 1 \rightarrow 1+1-1=1 \rightarrow$ Vetor;
4. $(\sigma : \tau) \rightarrow \sum - 4 \rightarrow 2+2-4=0 \rightarrow$ Escalar;
5. $\{\sigma \cdot \tau\} \rightarrow \sum - 2 \rightarrow 2+2-2=2 \rightarrow$ Tensor;

Operações Vetoriais de um Ponto de Vista Geométrico

1) Adição e subtração de vetores



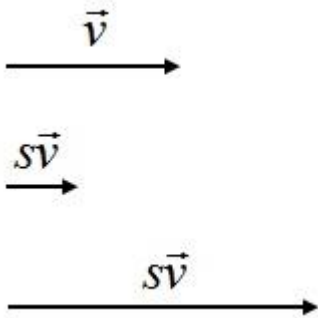
Adição



Subtração

2) Multiplicação por escalar

Muda a magnitude e direção do vetor. Sendo s um escalar qualquer, $s\vec{v} = \vec{v}s$.



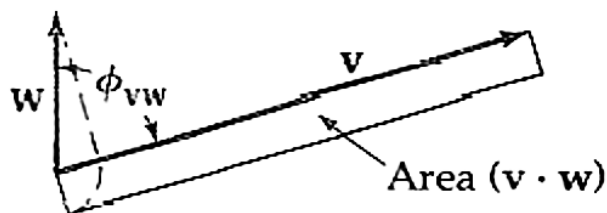
3) Produto escalar (ou produto ponto) de dois vetores

$$(\vec{v} \cdot \vec{w}) \rightarrow \sum -2 \rightarrow 1+1-2=0 \rightarrow \text{Escalar},$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{w}) = |\vec{v}||\vec{w}|\cos(\theta_{\vec{v}\vec{w}}), \text{ onde } \theta_{\vec{v}\vec{w}} \text{ é o ângulo } < 180^\circ \text{ entre os vetores } \vec{v} \text{ e } \vec{w}.$$

É distributiva: $(\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$.

Não é associativa.

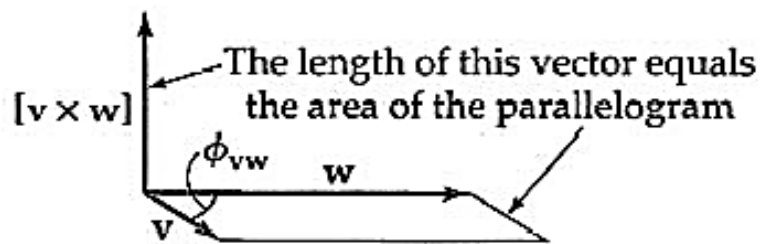


4) Produto vetorial (ou produto cruz) de dois vetores

$$[\vec{v} \times \vec{w}] \rightarrow \sum -1 \rightarrow 1+1-1=1 \rightarrow \text{Vetor} .$$

$[\vec{v} \times \vec{w}] = |\vec{v}||\vec{w}|\text{sen}(\theta)\eta_{\vec{v}\vec{w}}$, onde $\eta_{\vec{v}\vec{w}}$ é um vetor unitário normal ao plano contendo os vetores \vec{v} e \vec{w} , apontando de acordo com a regra da mão direita (de \vec{v} para \vec{w}), pelo caminho mais curto.

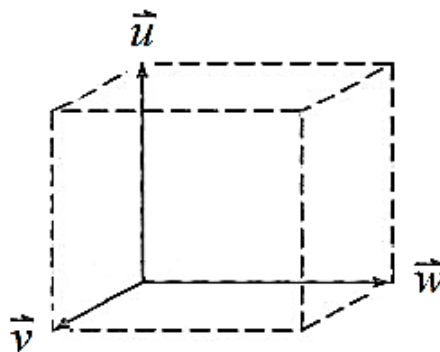
É não comutativa e não associativa.



5) Produtos múltiplos de vetores

$(\vec{u} \cdot [\vec{v} \times \vec{w}]) \rightarrow$ volume do paralelepípedo definido pelos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} .

$$[\vec{v} \times \vec{w}] = \vec{u} , \text{ então, } \vec{u} \cdot [\vec{v} \times \vec{w}] = \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 .$$



Operações Vetoriais de um Ponto de Vista Analítico

1) Delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = +1 , \text{ se } i = j ; \tag{1.1a}$$

$$\delta_{ij} = 0 , \text{ se } i \neq j . \tag{1.1b}$$

2) Tensor unitário alternante (símbolo de permutação)

$$\varepsilon_{ijk} = +1, \text{ se } ijk = 123, 231, 312; \quad (1.2a)$$

$$\varepsilon_{ijk} = -1, \text{ se } ijk = 132, 321, 213; \quad (1.2b)$$

$$\varepsilon_{ijk} = 0, \text{ se quaisquer dois índices forem iguais.} \quad (1.2c)$$

Ex:

Determinante

$$\begin{aligned} \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} = \\ &= \varepsilon_{111} a_{11} a_{21} a_{31} + \varepsilon_{112} a_{11} a_{21} a_{32} + \varepsilon_{113} a_{11} a_{21} a_{33} + \\ &+ \varepsilon_{121} a_{11} a_{22} a_{31} + \varepsilon_{122} a_{11} a_{22} a_{32} + \varepsilon_{123} a_{11} a_{22} a_{33} + \\ &+ \varepsilon_{131} a_{11} a_{23} a_{31} + \varepsilon_{132} a_{11} a_{23} a_{32} + \varepsilon_{133} a_{11} a_{23} a_{33} + \\ &+ \varepsilon_{211} a_{12} a_{21} a_{31} + \varepsilon_{212} a_{12} a_{21} a_{32} + \varepsilon_{213} a_{12} a_{21} a_{33} + \\ &+ \varepsilon_{221} a_{12} a_{22} a_{31} + \varepsilon_{222} a_{12} a_{22} a_{32} + \varepsilon_{223} a_{12} a_{22} a_{33} + \\ &+ \varepsilon_{231} a_{12} a_{23} a_{31} + \varepsilon_{232} a_{12} a_{23} a_{32} + \varepsilon_{233} a_{12} a_{23} a_{33} + \\ &+ \varepsilon_{311} a_{13} a_{21} a_{31} + \varepsilon_{312} a_{13} a_{21} a_{32} + \varepsilon_{313} a_{13} a_{21} a_{33} + \\ &+ \varepsilon_{321} a_{13} a_{22} a_{31} + \varepsilon_{322} a_{13} a_{22} a_{32} + \varepsilon_{323} a_{13} a_{22} a_{33} + \\ &+ \varepsilon_{331} a_{13} a_{23} a_{31} + \varepsilon_{332} a_{13} a_{23} a_{32} + \varepsilon_{333} a_{13} a_{23} a_{33} = \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{33} a_{12} a_{21} - a_{23} a_{32} a_{11} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Obs.1:

Note que:

$$\text{- se } i = j, \text{ então, } \varepsilon_{ijk} = 0;$$

$$\text{- se } i \neq j, \text{ então, } \delta_{ij} = 0;$$

$$\text{Assim, } \varepsilon_{ijk} \delta_{ij} = 0. \quad (1.4)$$

3) Definição de vetor e sua magnitude: os vetores unitários

Sejam v_1 , v_2 e v_3 as magnitudes (respectivas aos eixos coordenados 1, 2 e 3) do vetor \vec{v} , e $\vec{\delta}_1$, $\vec{\delta}_2$ e $\vec{\delta}_3$ os vetores unitários relativos aos respectivos eixos. Então temos:

$$\vec{v} = \vec{\delta}_1 v_1 + \vec{\delta}_2 v_2 + \vec{\delta}_3 v_3 = \sum_i \vec{\delta}_i v_i, \text{ ou simplesmente, } v_i.$$

a) Propriedades dos vetores unitários:

$$(\vec{\delta}_i \cdot \vec{\delta}_j) = |\vec{\delta}_i| |\vec{\delta}_j| \cos \theta = \delta_{ij} \text{ (Delta de Kronecker)}. \quad (1.5)$$

Exs:

$$\begin{aligned} (\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_1) &= 1 ; \\ (\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2) &= 0 ; \\ [\vec{\delta}_i \times \vec{\delta}_j] &= \sum_k \varepsilon_{ijk} \vec{\delta}_k . \end{aligned} \quad (1.6)$$

Exs:

$$\begin{aligned} \text{Se } i=1 \text{ e } j=2 &\Rightarrow \varepsilon_{123} \vec{\delta}_3 = \vec{\delta}_3 \Rightarrow [\vec{\delta}_1 \times \vec{\delta}_2] = \vec{\delta}_3 ; \\ \text{Se } i=2 \text{ e } j=1 &\Rightarrow \varepsilon_{213} \vec{\delta}_3 = -\vec{\delta}_3 \Rightarrow [\vec{\delta}_2 \times \vec{\delta}_1] = -\vec{\delta}_3 . \end{aligned}$$

Exs:

a) Produto escalar de dois vetores:

$$(\vec{v} \cdot \vec{w}) = v_i w_i = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 . \quad (1.7)$$

b) Produto vetorial de dois vetores:

$$[\vec{v} \times \vec{w}] = \sum \varepsilon_{ijk} \vec{\delta}_i v_j w_k = \vec{\delta}_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + \vec{\delta}_2 (v_3 w_1 - v_1 w_3) + \vec{\delta}_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1) . \quad (1.8)$$

Operações Diferenciais Vetoriais

O operador ∇ (Nabla) em coordenadas retangulares:

$$\begin{aligned} \nabla &= \vec{\delta}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{\delta}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{\delta}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \vec{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} , \text{ ou} \\ \nabla &= \vec{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} , \text{ onde } x_i \text{ é associado às coordenadas } x , y \text{ e } z . \end{aligned} \quad (1.9)$$

1) O gradiente de um campo escalar

Seja $S = f(x_1, x_2, x_3)$, então:

$$\nabla S = \sum_i \vec{\delta}_i \frac{\partial S}{\partial x_i} = \vec{\delta}_1 \frac{\partial S}{\partial x_1} + \vec{\delta}_2 \frac{\partial S}{\partial x_2} + \vec{\delta}_3 \frac{\partial S}{\partial x_3} . \quad (1.10)$$

Obs.2: ∇S , ou, $\text{grad } S$ é um vetor.

2) O divergente de um campo vetorial

$$(\nabla \cdot \vec{V}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} . \quad (1.12)$$

Obs.3: $\nabla \cdot \vec{V}$, ou, $\text{div } \vec{V}$ é um escalar.

Ex:

O operador divergente:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \vec{V}) &= \left(\vec{\delta}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{\delta}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{\delta}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot (\vec{\delta}_1 v_1 + \vec{\delta}_2 v_2 + \vec{\delta}_3 v_3) = \\ &= \vec{\delta}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \vec{\delta}_1 v_1 + \vec{\delta}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \vec{\delta}_2 v_2 + \vec{\delta}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \vec{\delta}_3 v_3 + \dots = \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} . \end{aligned} \quad (1.13)$$

3) O rotacional de um campo vetorial

$$\begin{aligned} [\nabla \times \vec{V}] &= \begin{vmatrix} \vec{\delta}_1 & \vec{\delta}_2 & \vec{\delta}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{vmatrix} = \vec{\delta}_1 \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) + \vec{\delta}_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) + \vec{\delta}_3 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \Rightarrow \\ & \quad (1.14) \end{aligned}$$

$$[\nabla \times \vec{V}] = [\vec{\delta}_j \times \vec{\delta}_k] \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \vec{\delta}_i .$$

Obs.4: $[\nabla \times \vec{V}]$, ou , $\text{rot } \vec{V}$ é um vetor.

4) O Laplaciano de um campo escalar

Faz-se o divergente do gradiente da função escalar S . É um escalar.

$$\nabla \cdot (\nabla S) = \frac{\partial^2 S}{\partial x_i^2} . \quad (1.15)$$

O operador Laplaciano:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} . \quad (1.16)$$

5) A derivada substancial

O operador derivada substancial:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \quad , \quad (1.17)$$

onde,

$$(\vec{V} \cdot \nabla S) = \bar{\delta}_i v_i \cdot \bar{\delta}_j \frac{\partial S}{\partial x_j} = \underbrace{(\bar{\delta}_i \cdot \bar{\delta}_j)}_{\delta_{ij}=1 \text{ se } i=j} v_i \frac{\partial S}{\partial x_j} = v_i \frac{\partial S}{\partial x_i} \quad . \quad (1.18)$$

Assim temos que:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) = \frac{\partial}{\partial t} + \left(v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \quad . \quad (1.19)$$

E para uma função escalar S qualquer:

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla S) = \frac{\partial S}{\partial t} + \left(v_i \frac{\partial S}{\partial x_i} \right) \quad (1.20)$$

Obs.5: $\frac{DS}{Dt}$ é um escalar.

6) A derivada substancial de um campo vetorial

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \sum_i \bar{\delta}_i \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v}_i \cdot \nabla) v_i \right\} \quad , \quad (1.21)$$

sendo que:

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \frac{1}{2} \nabla (\vec{V} \cdot \vec{V}) - [\vec{V} \times [\nabla \times \vec{V}]] \quad . \quad (1.22)$$

Obs.6: $\frac{D\vec{V}}{Dt}$ é um vetor.

Estudar:

- Tensores de 2ª ordem;
- Operações diferenciais envolvendo tensores e diádicos (tensor unitário);
- Teorema da divergência de Gauss;
- Teorema rotacional de Stokes;
- Fórmula de Liebnitz;

Capítulo 2

Exercício: (sobre “Linhas de corrente”)

Seja o campo de velocidades: (bidimensional, transiente)

$$\vec{V} = 2x \hat{i} - yt \hat{j} \text{ m/s} \quad (2.1)$$

v_1 v_2

Encontrar a linha de corrente, passando por (2,-1), em $t = 4\text{s}$:

Exs.:

$$\vec{V} = 2xy \hat{i} \quad (\text{bidimensional, permanente}) \quad (2.2a)$$

$$\vec{V} = 2xyt \hat{i} \quad (\text{bidimensional, transiente}) \quad (2.2b)$$

É preciso então desenhar a linha de corrente.

O vetor velocidade é tangente à linha de corrente de modo que:

$$\vec{V} \times d\vec{r} = 0, \quad \text{sen}(0) = 0 \quad (2.3)$$

Temos em $t = 4\text{s}$:

$$\vec{V} \times d\vec{r} = \varepsilon_{ijk} \vec{\delta}_i v_j dr_k = \varepsilon_{312} \vec{\delta}_3 v_1 dr_2 + \varepsilon_{321} \vec{\delta}_3 v_2 dr_1, \quad (2.4)$$

sendo:

$$d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} \quad (2.5)$$

Dessa forma, temos:

$$\hat{k} 2x dy - \hat{k} (-y) dx = 0 \Rightarrow 2x dy - y dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -2 \frac{dx}{x}, \quad (2.6)$$

e, integrando ambos os lados:

$$\ln y = -2 \ln x + \ln C \Rightarrow \ln y = \ln x^{-2} + \ln C = \ln Cx^{-2} \Rightarrow x^2 y = C \quad (2.7)$$

Em (2,-1), $C = -4$, de modo que a linha de corrente passando por (2,-1) tem a equação:

$$x^2 y = -4 \Rightarrow y = \frac{-4}{x^2} \quad (2.8)$$

Aceleração

Aceleração convectiva: aceleração no espaço (Euleriana).

Considere uma partícula. Sua velocidade muda de $\vec{V}(t)$ no tempo t para $\vec{V}(t + \Delta t)$ no tempo $t + \Delta t$.

Por definição:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad , \quad (2.9)$$

sendo que o vetor \vec{V} é dado por:

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} \quad , \quad (2.10)$$

e, como $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$ pela regra da cadeia do cálculo temos:

$$d\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt \quad . \quad (2.11)$$

De (2.11) e (2.9), obtemos a aceleração como sendo:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad . \quad (2.12)$$

E como seguimos uma partícula esférica:

$$\frac{dx}{dt} = u \quad , \quad \frac{dy}{dt} = v \quad , \quad \text{e} \quad , \quad \frac{dz}{dt} = w \quad , \quad (2.13)$$

então:

$$\vec{a} = \underbrace{u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}}_{\text{aceleração convectiva}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{aceleração local}} \quad . \quad (2.14)$$

Assim, a eq. (2.14) pode ser escrita da forma:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} \quad . \quad (2.15)$$

Obs.1: Em coordenadas retangulares, a derivada substancial é dada por:

$$\frac{D}{Dt} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \quad . \quad (2.16)$$

Aplicação da Derivada Substancial Euleriana

Ex.: dos peixes.

a) Indivíduo em uma ponte contando os peixes.

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} \quad . \quad (2.17a)$$

b) Indivíduo em uma lancha contando os peixes.

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial c}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial c}{\partial t} \quad , \quad (2.17b)$$

sendo $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ as componentes da velocidade da lancha.

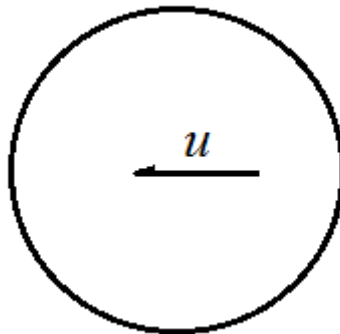
c) Indivíduo em uma canoa contando os peixes.

$$\frac{Dc}{Dt} = u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial t} \quad , \quad (2.17c)$$

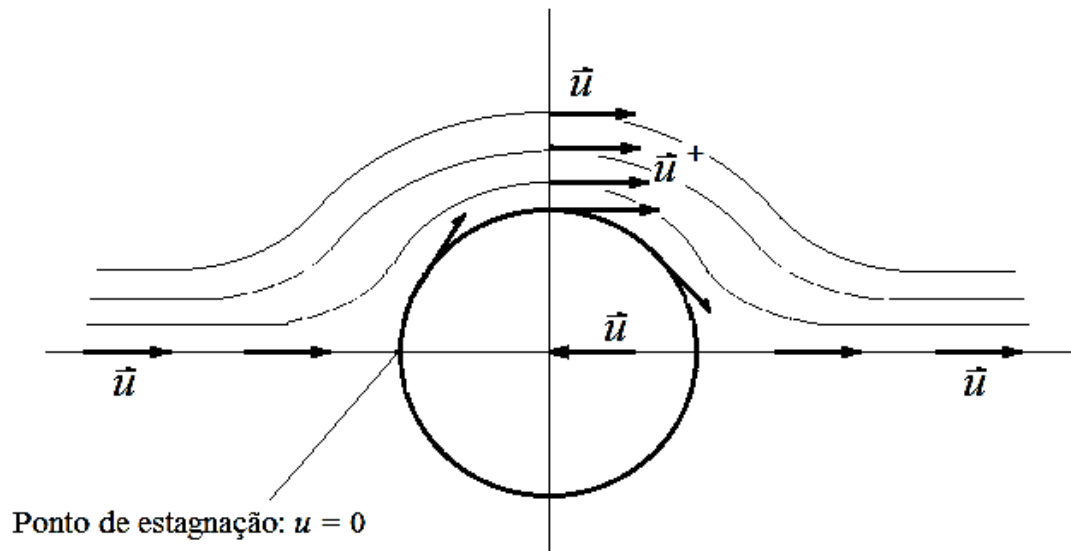
sendo $u, v, e w$ as componentes da velocidade do fluido.

Velocidade Relativa de um Fluido

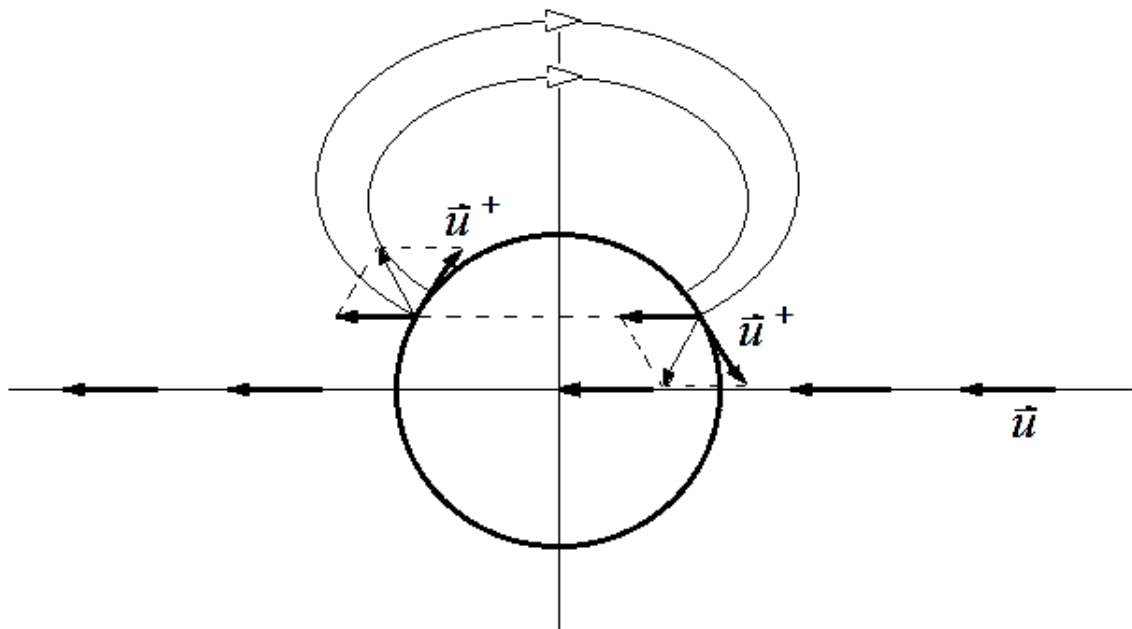
Ex.:



Referencial não inercial:



Referencial inercial:



$$\vec{V}_{\text{abs}} = \vec{V}_{\text{rel}} + \vec{V}_{\text{corpo}}$$

Forma Integral das Equações Básicas para Volume de Controle

Derivação do teorema do transporte de Reynolds:

- Volume de controle (VC) fixo no espaço.
- O sistema sempre deve consistir das mesmas partículas fluidas e deve mover-se com o campo de escoamento $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$.
- O sistema deve ser escolhido de tal forma que a massa dentro da região I entra no VC durante o intervalo Δt , e a massa da região III deixa o VC durante o mesmo intervalo.
- Da definição da derivada, a taxa de variação de $N_{sistema}$ é:

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{sist.} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_s|_{t_0+\Delta t} - N_s|_{t_0}}{\Delta t} \quad (2.18)$$

Assim:

$$N_s|_{t_0+\Delta t} = (N_{II} + N_{III})_{t_0+\Delta t} = (N_{VC} - N_I + N_{III})_{t_0+\Delta t} \quad , \quad (2.19)$$

ou,

$$N_s|_{t_0+\Delta t} = \left[\int_{VC} \eta \rho dV \right]_{t_0+\Delta t} - \left[\int_I \eta \rho dV \right]_{t_0+\Delta t} + \left[\int_{III} \eta \rho dV \right]_{t_0+\Delta t} \quad , \quad (2.20)$$

e,

$$N_s|_{t_0} = N_{VC}|_{t_0} = \left[\int_{VC} \eta \rho dV \right]_{t_0} \quad . \quad (2.21)$$

Substituindo (2.20) e (2.21) em (2.18), para o VC, temos:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dN}{dt} \right|_{sist.} = & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\left[\int_{VC} \eta \rho dV \right]_{t_0+\Delta t} - \left[\int_{VC} \eta \rho dV \right]_{t_0}}{\Delta t}}_A \\ & + \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left[\int_{III} \eta \rho dV \right]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}}_B - \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left[\int_I \eta \rho dV \right]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}}_C \quad . \quad (2.22) \end{aligned}$$

E termo por termo:

A:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{VC}|_{t_0+\Delta t} - N_{VC}|_{t_0}}{\Delta t} = \frac{dN_{VC}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \rho dV \quad , \quad (2.23)$$

B: (saída de propriedade N)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{III}|_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} \quad . \quad (2.24)$$

- $d\vec{A}$ tem magnitude igual ao elemento de área dA da superfície de controle e sentido normal externo ao elemento da superfície de controle (SC).

- α é o ângulo formado pelos vetores \vec{V} e $d\vec{A}$ ($0 < \alpha < \pi/2$, ou seja, $0 < \cos \alpha \leq 1$).

- α será sempre menor do que $\pi/2$, pois a massa da região III esco para fora do VC durante Δt .

Assim, e sendo:

$$dV = \Delta \ell \cos \alpha dA \quad , \quad (2.25)$$

temos:

$$dN_{III}|_{t_0+\Delta t} = (\eta \rho dV)_{t_0+\Delta t} = [\eta \rho (\Delta \ell \cos \alpha dA)]_{t_0+\Delta t} \quad . \quad (2.26)$$

Para a região completa III:

$$N_{III}|_{t_0+\Delta t} = \left[\int_{SC_{III}} \eta \rho \Delta \ell \cos \alpha dA \right]_{t_0+\Delta t} \quad . \quad (2.27)$$

Assim, voltando a B (2.24), temos:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{III}|_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{SC_{III}} \eta \rho \Delta \ell \cos \alpha dA}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{SC_{III}} \eta \rho \frac{\Delta \ell}{\Delta t} \cos \alpha dA \\ &= \int_{SC_{III}} \eta \rho |\vec{V}| |d\vec{A}| \cos \alpha = \int_{SC_{III}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad , \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \ell}{\Delta t} = |\vec{V}| \quad , \text{ e, } dA = |d\vec{A}| \quad . \quad (2.29)$$

C: (entrada de matéria)

$$-\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_1|_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} . \quad (2.30)$$

Temos, neste caso, que:

$$\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi , \text{ e, } -1 \leq \cos \alpha < 0 .$$

Assim:

$$-dN_1|_{t_0+\Delta t} = -(\eta\rho d\mathcal{V})_{t_0+\Delta t} = -\left[\underbrace{\eta\rho \Delta\ell(-\cos\alpha)}_{d\mathcal{V}} dA \right]_{t_0+\Delta t} . \quad (2.31)$$

Analogamente, voltando a C (2.30), temos:

$$\int_{SC_1} \eta\rho \underbrace{|\vec{V}| |d\vec{A}| \cos\alpha}_{\vec{V} \cdot d\vec{A}} = \int_{SC_1} \eta\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} . \quad (2.32)$$

Finalmente, substituindo (2.23), (2.28) e (2.32) em (2.22), temos:

$$\frac{dN}{dt} \Big|_{sist.} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta\rho d\mathcal{V} + \int_{SC} \eta\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} . \quad (2.33)$$

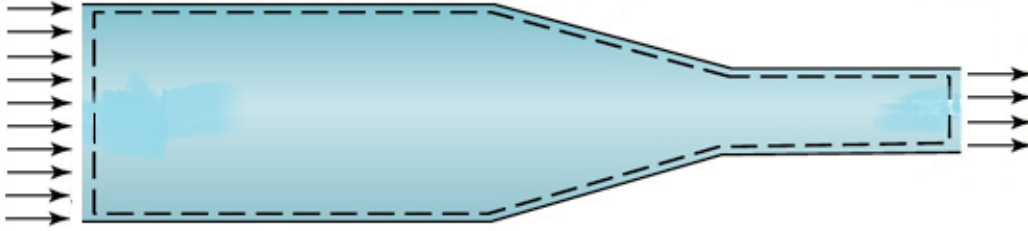
O produto escalar $\vec{V} \cdot d\vec{A}$ indica, pelo sinal em função do ângulo formado entre os respectivos vetores, se houve entrada ou saída de matéria:

- se positivo (+): p/ fora (saída);
- se negativo (-): p/ dentro (entrada).

Capítulo 3

Teorema do Transporte de Reynolds

Considerando por hipótese \vec{V} uniforme na seção transversal A , temos:



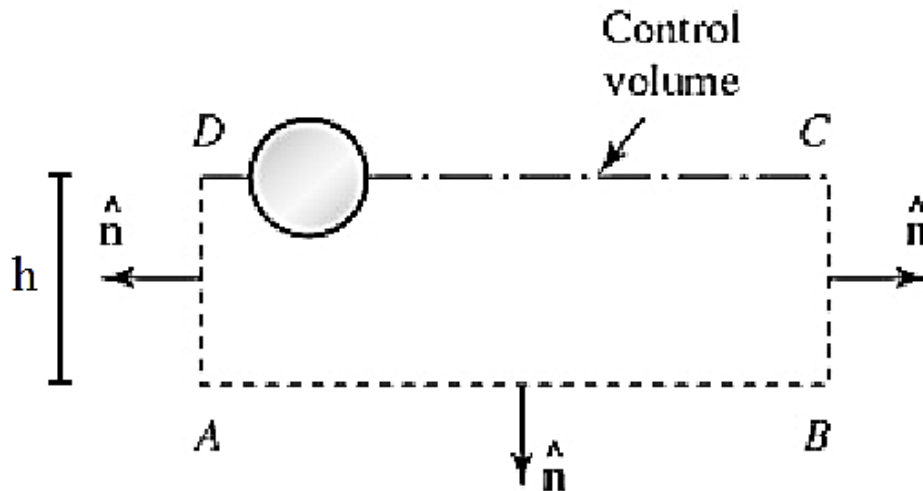
$$\int_{A_n} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \eta \rho \int_{A_n} \vec{V} \cdot d\vec{A} = \eta \rho \vec{V} \cdot \int_{A_n} d\vec{A} = \eta \rho \vec{V} \cdot \vec{A}_n = \eta \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \eta \rho |\vec{V}| |d\vec{A}_n| \cos \theta \quad . \quad (3.1)$$

Exs.1 e 2:



Conservação da Massa para um Volume de Controle Inercial

Ex.3:



Hipóteses:

1. Escoamento em regime permanente;
2. Escoamento incompressível;
3. Escoamento uniforme (Área AD);
4. $\dot{m} = 0$ em DC (linha de simetria).

Equação governante: Eq. da continuidade

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \Rightarrow$$

$$0 = \int_{AB} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{BC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{AD} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \Rightarrow$$

$$0 = \dot{m}_{AB} + \int_0^H \underbrace{\rho u(y)}_{\text{veloc.}} \cdot \underbrace{1}_{\text{área}} \cdot dy - \underbrace{\rho(H \cdot 1)}_{\text{área}} \cdot \underbrace{1,5}_{\text{veloc.}}, \quad (3.2)$$

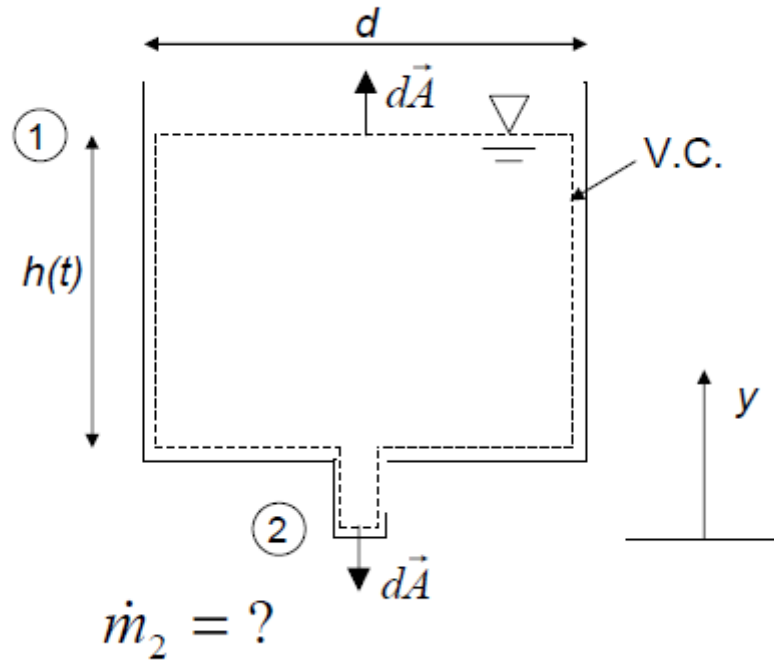
sendo a profundidade de 1m.

Avaliando a integral de $0 < y < 1$ (só na esteira):

$$0 = \dot{m}_{AB} + \int_0^1 (1,23) \left(1,25 + \frac{y^2}{4} \right) dy - (1,23)(1)(1,5) \Rightarrow$$

$$\dot{m}_{AB} = 0,205 \text{ Kg/s} \cdot \text{m} \quad (3.3)$$

Ex.4: Volume de controle deformável



Equação governante: Eq. da continuidade.

Para um volume de controle deformável, aplicamos a “Regra de Liebnitz”:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{SC} \rho \vec{V}_{SC} \cdot d\vec{A} + \int_{SC} \rho \vec{V}_r \cdot d\vec{A} = 0 \quad , \quad (3.4)$$

então temos:

$$\underbrace{\int_{SC} \rho \vec{V}_{SC} \cdot d\vec{A}}_A + \underbrace{\int_{SC} \rho \vec{V}_r \cdot d\vec{A}}_B = 0 \quad . \quad (3.5)$$

onde:

A: Será avaliada apenas na seção 1. Nas outras, $\vec{V}_{SC} = 0$.

B: Será avaliada apenas na seção 2.

sendo:

$$\vec{V}_r = \vec{V}_{\text{fluido}} - \vec{V}_{SC}.$$

- em 1: $\vec{V}_r = 0$ (a fronteira se desloca à velocidade do fluido).

- em 2: $\vec{V}_r = \vec{V}_{\text{fluido}}$ ($\vec{V}_{SC} = 0$ em 2).

Assim:

$$\int_{A_1} \rho \left(-\frac{dh}{dt} \right) dA_1 + \int_{A_2} \rho \vec{V}_r \cdot d\vec{A}_2 = 0 \quad , \quad (3.6)$$

mas, como:

$$\dot{m}_2 = \int_{A_2} \rho \vec{V}_r \cdot d\vec{A}_2 \quad , \quad (3.7)$$

então:

$$\dot{m}_2(t) = \int_{A_1} \rho \left| \frac{dh}{dt} \right| dA_1 = \rho \frac{dh}{dt} \pi \frac{d^2}{4} = \rho |h| \pi \frac{d^2}{4} \quad . \quad (3.8)$$

Equação da Quantidade de Movimento para um Volume de Controle

Ex.1: Escoamento interno (“cotovelo”).

Hipóteses:

1. Escoamento em regime permanente;
2. Escoamento incompressível;
3. Escoamento uniforme;

Velocidades médias:

$$Q = VA \Rightarrow \quad (3.9)$$

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0,3}{\pi \frac{(3/12)^2}{4}} = 6,11 \text{ ft/s} \quad , \quad \text{e} \quad V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0,3}{\pi \frac{(1,5/12)^2}{4}} = 24,4 \text{ ft/s} \quad , \quad (3.10)$$

sendo $1 \text{ in} = \frac{1}{12} \text{ ft}$.

Para calcular R_x e R_y , precisamos p_1 e p_2 . Como trabalhamos com pressões manométricas, temos que $p_2 = p_{\text{atm}} = 0$.

Na Eq. de Bernoulli:

$$p_1 = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2) = \frac{1,94}{2}(24,4^2 - 6,11^2) = 541,29 \text{ P/sf} . \quad (3.11)$$

Temos a Eq. da Quantidade de Movimento:

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \cancel{\vec{F}_B}^0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{V} \rho dV + \int_{SC} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} , \quad (3.12)$$

e como há, somente, uma entrada e uma saída:

$$\vec{F}_S = \int_{SC} \vec{V} \underbrace{\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}}_{\dot{m}} = \dot{m}(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) . \quad (3.13)$$

Na direção x :

$$p_1 A_1 - R_x = \dot{m}(0 - u) = \rho u A (-u) \Rightarrow 541,29 \left[\frac{\pi}{4} \left(\frac{3}{12} \right)^2 \right] - R_x = (1,94)(0,3)(-6,11) \Rightarrow$$

$$R_x = 30,13 \text{ lbf} . \quad (3.14)$$

Na direção y :

$$R_y = \dot{m}(v - 0) = \rho v A v = (1,94)(0,3)(24,4) \Rightarrow R_y = 14,2 \text{ lbf} . \quad (3.15)$$

Capítulo 4

Ex.2: Escoamento externo (“cilindro”).

Hipóteses:

1. Escoamento em regime permanente;
2. Escoamento incompressível (para o ar, se o nº de Mach é baixo, o escoamento é incompressível);
3. Escoamento uniforme em AB;
4. Força de campo desprezível em x .

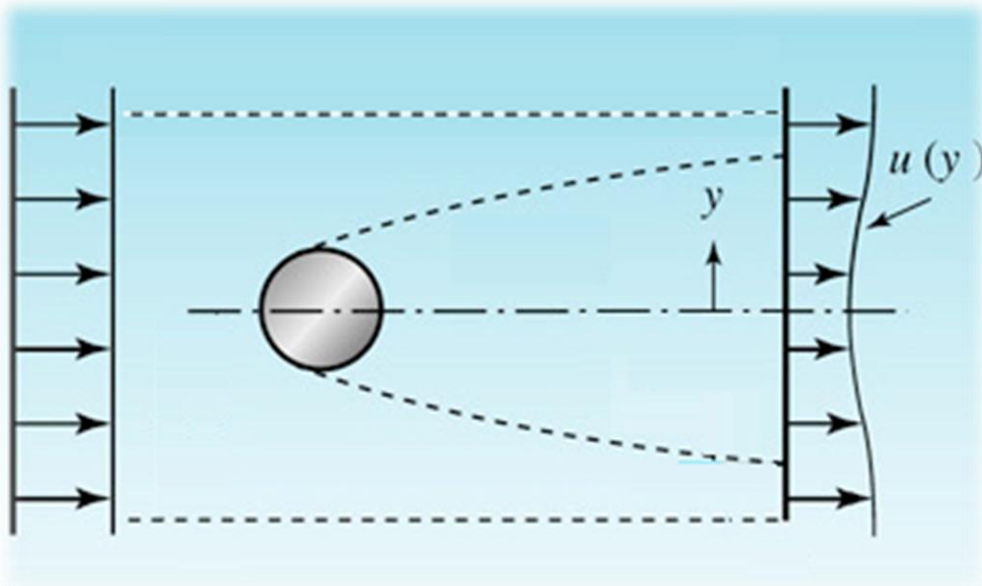
Equações governantes:

Eq. da continuidade:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad , \quad (4.1)$$

Eq. da quantidade de movimento (q.d.m.):

$$\vec{F}_S + \vec{F}_B^{(4)} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{V} dV^{(1)} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad . \quad (4.2)$$



- q.d.m. em y : simetria (as forças se cancelam);
- q.d.m. em x : (abaixo)

$$-\vec{F} = \int_{A_{CD}} \rho u \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{AD}} \rho u \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{BC}} \rho u \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{AB}} \rho u \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad , \quad (4.3)$$

sendo que, nos termos para as integrais das áreas, temos:

- A_{CD} : $u = u(y)$, e, $\vec{V} = u(y)\hat{i}$;
- A_{AD} : $u = u_{\infty}$;
- A_{BC} : $u = u_{\infty}$;
- A_{AB} : $u = u_{\infty}$;

e aplicando em (4.3):

$$\begin{aligned} -F &= \int_{A_{CD}} \rho u(y)^2 dA + \dot{m}_{AD} u_{\infty} + \dot{m}_{BC} u_{\infty} - \rho u_{\infty}^2 A_{AB} = \\ &= \int_{A_{CD}} \rho u(y)^2 dA + \dot{m}_{AD} 2u_{\infty} - \rho u_{\infty}^2 A_{AB} \Rightarrow \\ -F &= 2 \int_0^{10} (1,23) \left(29 + \frac{y^2}{100} \right)^2 1 \cdot dy + 2(30 \dot{m}_{AD}) - (1,23)(30)^2 [(1)(20)] \quad . \end{aligned} \quad (4.4)$$

Nas seções AB e CD, a velocidade é igual a velocidade na direção x .

Encontrando a \dot{m}_{AD} a partir da equação da continuidade.

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot dA = \int_{A_{AD}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{BC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{AB}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{CD}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \\ &= \dot{m}_{AD} + \dot{m}_{BC} - \rho(20)(30) + 2 \int_0^{10} \rho u(y) dy = \\ &= 2\dot{m}_{AD} - (1,23)(20)(30) + 2 \int_0^{10} (1,23) \left(29 + \frac{y^2}{100} \right) dy \Rightarrow \\ \dot{m}_{AD} &= 8,2 \text{ Kg/s} \cdot \text{m} . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Logo, aplicando (4.5) em (4.4):

$$-F = -21170 - 492 + 22140 = 478 \text{ N/m} . \quad (4.6)$$

A força de arrasto, então, é:

$$\vec{F}_S = -F = 478 \text{ N/m} . \quad (4.7)$$

Ex.3: Volume de controle movendo-se com velocidade constante (“defletor”).

- Adotado um volume de controle fixo ao defletor.
- Referencial não-inercial.

Hipóteses:

1. Escoamento em regime permanente segundo referencial não-inercial;
2. Escoamento incompressível;
3. Escoamento uniforme;
4. Escoamento invíscido.

a) Calculando as forças:

Equação governante:

Eq. da quantidade de movimento (q.d.m.):

$$\vec{F}_S + \vec{F}_B^0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{V}_{xyz} \rho dV + \int_{SC} \vec{V}_{xyz} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot dA \quad (4.8)$$

- q.d.m. em x : somente uma entrada e uma saída;

$$-R_x = \dot{m}_r [(V_{r2})_x - (V_{r1})_x] \quad (4.9)$$

Da eq. de Bernoulli, temos:

$$\frac{V_{r1}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz_1 = \frac{V_{r2}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz_2 \quad (4.10)$$

sendo p a pressão atmosférica (ou zero manométrica), e $z_1 \cong z_2$ considerando o defletor de pequenas proporções.

Como o escoamento é invíscido, pode-se utilizar Bernoulli considerando a velocidade uniforme: $V_{r1} = V_{r2} = V_r$ (velocidade relativa).

Portanto, temos:

$$\begin{aligned} -R_x &= \dot{m}_r [(V_{r2})_x - (V_{r1})_x] = \\ &= \rho A V_r [(V_{r2})_x - (V_{r1})_x] = \\ &= (1000) \underbrace{(0,002)(0,4)}_A (50) [(50 \cos 30^\circ - 50)] \Rightarrow \\ R_x &= 268 \text{ N} \quad (4.11) \end{aligned}$$

- q.d.m. em y :

$$\begin{aligned}
 R_y &= \dot{m}_r [(V_{r2})_y - (V_{r1})_y] = \\
 &= \rho A V_r [(V_{r2})_y - (V_{r1})_y] = \\
 &= (1000)(0,002)(0,4)(50) [(50 \sin 30^\circ)] \Rightarrow \\
 R_y &= 1000 \text{ N} .
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

b) Calculando \vec{V}_2 para um referencial inercial:

$$\vec{V}_{\text{abs}} = \vec{V}_r + \vec{V}_{\text{corpo}} \Rightarrow \vec{V}_2 = \vec{V}_{r2} + \vec{V}_{\text{corpo}} \tag{4.13}$$

Assim:

$$(V_2)_x = V_{r2} \cos 30^\circ + V_{\text{corpo}} = (50)(0,866) + 30 = 73,3 \text{ m/s} , \tag{4.14a}$$

$$(V_2)_y = V_{r2} \sin 30^\circ + V_{\text{corpo}} = (50)(0,5) + 0 = 25 \text{ m/s} , \tag{4.14b}$$

$$\vec{V}_2 = 73,7\hat{i} + 25\hat{j} , \tag{4.14c}$$

c) Calculando a potência:

$$\dot{W} = R_x V_{\text{corpo}} = (268)(30) = 8040 \text{ W} . \tag{4.15}$$

Ex. 4: Volume de controle com aceleração retilínea

O arrasto é função do quadrado da velocidade. No início é desprezível. Corresponde à força de superfície F_s .

Eq. governante:

Eq. quantidade de movimento (q.d.m.).

- q.d.m. em y :

Hipóteses:

1. $(F_s)_y = 0$;
2. Escoamento uniforme na saída do bocal;
3. Despreza-se a taxa de variação da q.d.m. dentro do VC ;
 - 3.1. O combustível não queimado e as estruturas do foguete tem q.d.m. nula em relação ao próprio foguete.
 - 3.2. A velocidade do gás no bocal de descarga permanece constante com o tempo, assim como as velocidades nos vários pontos do bocal.

$$\cancel{(\vec{F}_S)}^{0(1)} + (\vec{F}_B) - \int_{VC} \vec{a}_{rf} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{V}_{xyz}^{0(3)} \rho dV + \int_{SC} \vec{V}_{xyz} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} , \tag{4.16}$$

Fazendo o balanço em y :

$$\begin{aligned}
 -W - a_{rf} M_{VC} &= -V\dot{m} = -V_S \dot{m} \Rightarrow \\
 -W - \frac{d^2 H}{dt^2} M_{VC} &= -V_S \dot{m} \quad .
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

Da eq. da continuidade:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot dA = \frac{dM_{VC}}{dt} + \dot{m} \Rightarrow \\
 dM_{VC} &= -\dot{m} dt \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

o que nos mostra que a massa é uma função temporal.

Então, integrando (4.18):

$$\begin{aligned}
 \int_{150}^{M_{VC}} dM_{VC} &= -\dot{m} \int_0^t dt \Rightarrow M_{VC} - 150 = -\dot{m}t \Rightarrow M_{VC} = 150 - \dot{m}t \Rightarrow \\
 M_{VC} &= 150 - 10t \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

e, para a força peso:

$$W = M_{VC} g = (150 - 10t)(9,81) \quad .
 \tag{4.20}$$

Substituindo (4.19) e (4.20) em (4.17), temos:

$$\begin{aligned}
 -(150 - 10t)(9,81) - \frac{d^2 H}{dt^2} (150 - 10t) &= -(10)(700) = -7000 \Rightarrow \\
 \frac{d^2 H}{dt^2} &= \frac{700}{15 - t} - 9,81 \quad .
 \end{aligned}
 \tag{4.21}$$

a) Calculando $\frac{d^2 H}{dt^2}$. De (4.21), para $t = 0$:

$$\frac{d^2 H}{dt^2} = \frac{700}{15 - 0} - 9,81 = 36,9 \text{ m/s}^2 \quad .
 \tag{4.22}$$

b) Calculando $\frac{dH}{dt}$ após 4s :

$$\frac{dH}{dt} = -700 \ln(15 - t) - 9,81 t + c \quad ,
 \tag{4.23}$$

$$c = 700 \ln 15 \quad , \text{ pois, p/ } t = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \quad .$$

Assim, p/ $t = 4$ s, em (4.23):

$$\frac{dH}{dt} = 700 \ln\left(\frac{15}{11}\right) - (9,81)(4) = 178 \text{ m/s} . \quad (4.24)$$

Equação Completa da Quantidade de Movimento (q.d.m.) Integral

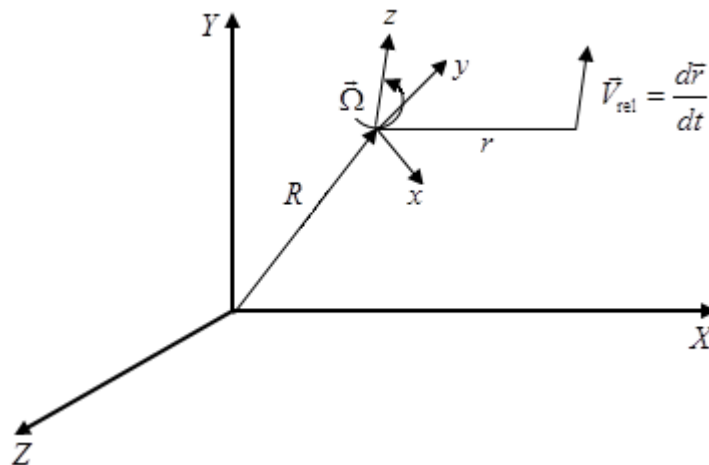
$$\underbrace{\vec{g} \int_{VC} \rho dV}_{A} - \underbrace{\int_{SC} p \vec{n} dA}_{B} + \underbrace{\int_{SC} [\vec{n} \cdot \tau] dA}_{C} + \underbrace{\vec{F}_{mec.}}_D - \underbrace{\int_{VC} \rho \vec{a}_{rf} dV}_{E} = \quad (4.25)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{V} dV}_{F} + \underbrace{\int_{SC} \rho \vec{V}_r (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA}_{G}$$

sendo cada termo referente a:

- A : Força gravitacional;
- B : Força normal à SC (pressão estática);
- C : Força tangencial à SC;
- D : Força mecânica que cruza a SC;
- E : Aceleração do VC;
- F : Taxa de variação da q.d.m. dentro do VC;
- G : Fluxo da q.d.m. através da SC.

Referencial Não Inercial (x, y, z) Deslocando e Girando com Velocidades $\frac{d\vec{R}}{dt}$ e $\vec{\Omega}$ com Relação a um Referencial Inercial (X, Y, Z) .



onde:

$$\vec{a}_{rf} = \underbrace{\frac{d^2 R}{dt^2}}_A + \underbrace{\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{v}}_B + \underbrace{2\vec{\Omega} \times \vec{v}}_C + \underbrace{\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v})}_D, \quad (4.26)$$

sendo cada um dos termos referente a:

A : Aceleração linear do referencial (x, y, z) ;

B : Aceleração angular do referencial (x, y, z) ;

C : Aceleração de Coriolis do referencial (x, y, z) . Atua em um plano normal ao plano de rotação;

D : Aceleração centrípeta.

Portanto, para referenciais não inerciais, a segunda lei de Newton escreve:

$$\left. \frac{D}{Dt} (m\vec{V}) \right|_{sist.} = \sum \vec{F}_{ext.} - M_{sist.} \cdot \vec{a}_{rf}, \quad (4.27)$$

sendo:

$\sum \vec{F}_{ext.}$: o somatório das forças externas agindo sobre o sistema, e

\vec{a}_{rf} : a aceleração relativa ao referencial inercial.

Capítulo 5

Análise Diferencial do Movimento dos Fluidos

Bibliografia recomendada: [3], [6] e [8].

Formulação diferencial:

Partindo da equação integral genérica:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \eta dV + \int_{SC} \rho \eta (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA}_{\text{termos de transporte}} = \underbrace{\int_{SC} (J \cdot \vec{n}) dA + \int_{VC} \rho S dV}_{\text{termos fonte}} . \quad (5.1)$$

Tabela 1: Para as equações de conservação.

Equações:	η	J	S
da massa	1	0	0
da q.d.m.	\vec{V}	τ	\vec{g}
da energia	e	$\dot{W} - \dot{Q}$	S

sendo S uma propriedade qualquer.

Teorema de Gauss:

$$\int_{SC} \rho \beta (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \int_{VC} \nabla \cdot (\rho \beta \vec{V}) dV . \quad (5.2)$$

Para um VC não deformável (aplicando a “Regra de Liebnitz”):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} (\rho \eta) dV = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \eta) dV + 0 , \quad (5.3)$$

sendo a velocidade nula na fronteira e, conseqüentemente:

$$\int_{VC} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \eta) + \nabla \cdot (\rho \eta \vec{V}) - \nabla \cdot J - \rho S \right] dV = 0 . \quad (5.4)$$

Assim, temos a equação diferencial de transporte genérica:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \eta) + \nabla \cdot (\rho \eta \vec{V}) = \nabla \cdot J + \rho S . \quad (5.5)$$

Esse processo será repetido para cada uma das equações de conservação.

1) Equação de Conservação da Massa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = 0 , \quad (5.6a)$$

Aplicando a regra de Liebnitz e o Teorema de Gauss em (5.6):

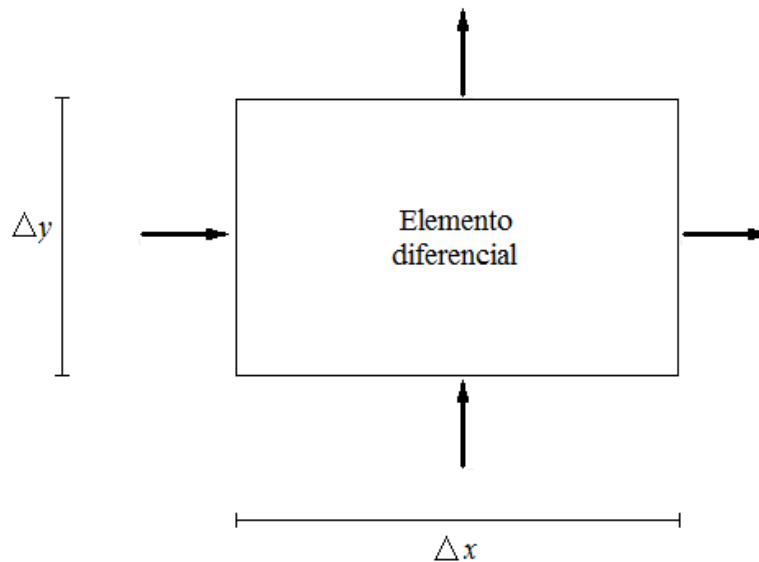
$$\int_{VC} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] dV = 0 \Rightarrow \quad (5.6b)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 , \quad (5.6c)$$

onde $\rho \vec{V}$ corresponde ao vetor velocidade mássica, ou, fluxo mássico. A equação (5.6c) é conhecida como **equação diferencial da massa** e pode ser obtida substituindo-se η por 1 na equação diferencial genérica.

Anexo 1: (Balanço de massa)

$$\int_{SC} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA . \quad (5.7)$$



Balanco de fluxo mássico:

$$\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \Delta x \right] \Delta y - (\rho u) \Delta y + \left[\rho v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) \Delta y \right] \Delta x - (\rho v) \Delta x = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) \right] \Delta x \Delta y \quad (5.8)$$

Obs.1:

Em 3 dimensões, temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)}_{\text{Divergente do vetor velocidade mássica } \rho \vec{V}} = 0 \quad (5.9)$$

e voltando a (5.6c), temos:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_A + \rho \nabla \cdot \vec{V} + \underbrace{\vec{V} \cdot \nabla \rho}_B = 0 \quad (5.10)$$

e como os termos A e B somados correspondem à derivada substancial, reescrevemos (5.10) da forma:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (5.11)$$

Para fluidos incompressíveis ($\rho = \text{cte}$), temos que:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad , \quad \text{e,} \quad \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad ,$$

então, nestes casos:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (5.12)$$

Relacionando a integral de fluxo com a equação diferencial:

$$\rho \nabla \cdot \vec{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \int_{SC} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad (5.13)$$

o que significa que o divergente de \vec{V} é igual ao limite quando o volume formado pelos fluxos que atravessam a superfície tende a zero.

Obs.2:

Estudar o conceito matemático da função corrente: Ψ .

2) Equação de Conservação da Quantidade de Movimento (q.d.m.):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} (\rho v_i) dV + \int_{SC} \rho v_i (v_i \cdot n_i) dA = \int_{SC} (\tau_{ji} \cdot n_j) dA + \int_{VC} \rho g_i dV , \quad (5.14)$$

sendo τ_{ji} o tensor das tensões.

Aplicando em (5.14) o Teorema de Gauss e a Regra de Liebnitz:

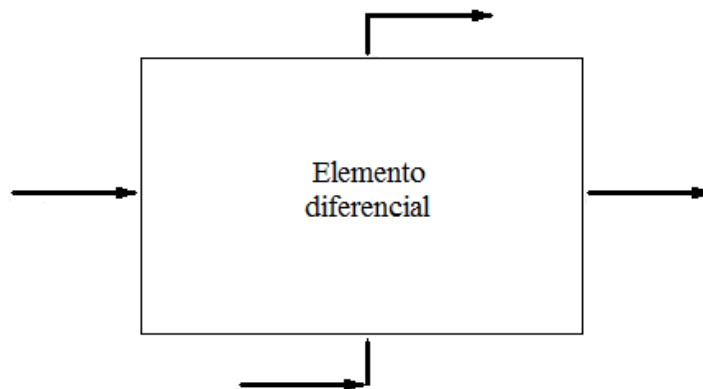
$$\int_{VC} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \nabla \cdot (\rho v_i v_j) - \nabla \cdot \tau_{ji} - \rho g_i \right] dV = 0 \Rightarrow \quad (5.15a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \nabla \cdot (\rho v_i v_j) = \nabla \cdot \tau_{ji} + \rho g_i , \quad (5.15b)$$

A **equação diferencial da quantidade de movimento (q.d.m.)** (5.15b) pode ser obtida da equação genérica (5.5), fazendo-se $\eta = v_{ij}$, $J = \tau_{ji}$, e, $S = g_i$.

Anexo 2: (Balanço de fluxo da quantidade de movimento na direção x)

$$\nabla \cdot \rho v_i v_j = \int_{SC} \rho u (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA . \quad (5.16)$$

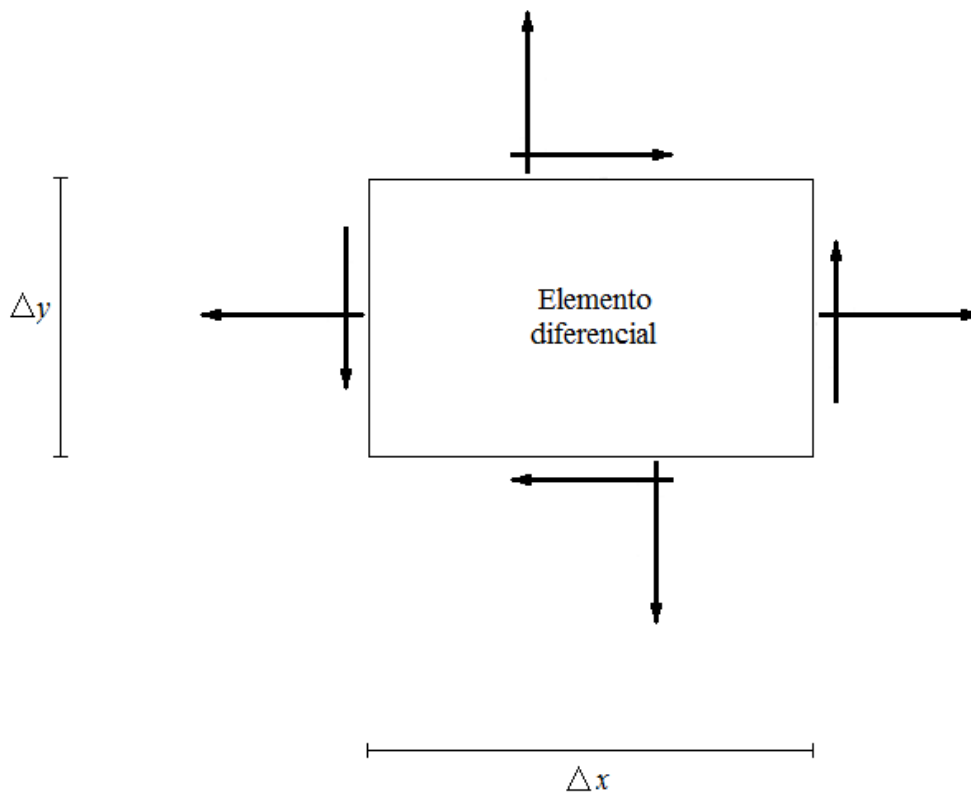


$$\begin{aligned}
& \left[\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \right) \right] \Delta x \equiv \rho u u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u u) \Delta x \Rightarrow \\
& \left[\rho u u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u u) \Delta x \right] \Delta y - \rho u u \Delta y + \left[\rho v u + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v u) \Delta y \right] \Delta x - \rho v u \Delta x = \\
& = \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v u) \right] \Delta x \Delta y = \\
& = \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) \Delta x \Delta y \Delta z = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} (\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u w) , \tag{5.17}
\end{aligned}$$

que é a componente na direção x do $\text{Div}(\rho \vec{V} \vec{V})$, lembrando que:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \int_{SC} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA . \tag{5.18}$$

Anexo 3: (Balanço de forças na direção x)



Na direção x :

$$\left(\tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} \Delta x \right) \Delta y - \tau_{xx} \Delta y + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} \Delta y \right) \Delta x - \tau_{yx} \Delta x =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} \right) \Delta x \Delta y = \nabla \cdot \tau (\Delta x \Delta y \Delta z) . \quad (5.19)$$

$$\nabla \cdot \tau = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \int_{SC} (\mathbf{n}_j \tau_{ji}) dA , \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \nabla \cdot (\rho v_i v_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ji} + \rho g_i \Rightarrow \quad (5.21a)$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i [\nabla \cdot (\rho v_j)] + [\rho v_j \cdot \nabla] v_i = \nabla \cdot \tau_{ij} + \rho g_i , \quad (5.21b)$$

restando:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \cdot (\nabla v_i) = \nabla \cdot \tau_{ji} + \rho g_i , \text{ ou,} \quad (5.22a)$$

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \nabla \cdot \tau_{ji} + \rho g_i , \quad (5.22b)$$

que correspondem ambas à equação diferencial da quantidade de movimento (q.d.m.) na forma não-conservativa.

3) Equação da Conservação da Energia:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} (\rho e) dV + \int_{SC} \rho e (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA . \quad (5.23)$$

Aplicando o Teorema de Gauss e a Regra de Liebnitz em (5.23), temos:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \int_{VC} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \nabla \cdot (\rho e \vec{V}) \right] dV \Rightarrow \quad (5.24a)$$

$$\dot{Q} - \dot{W} = \int_{VC} \left[\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \underbrace{e \frac{\partial \rho}{\partial t}}_A + \underbrace{e \nabla \cdot (\rho \vec{V})}_B + \rho \vec{V} \cdot \nabla e \right] dV , \quad (5.24b)$$

e da equação da conservação da massa, temos:

$$e \left[\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V})}_{=0 \text{ (eq. conserv. massa)}} \right] = 0 , \quad (5.25)$$

restando:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \nabla e = \rho \frac{De}{Dt} , \quad (5.26)$$

que corresponde à derivada substancial da energia.

Assim, podemos reescrever a (5.24a) da seguinte forma:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \int_{vc} \rho \frac{De}{Dt} dV , \quad (5.27)$$

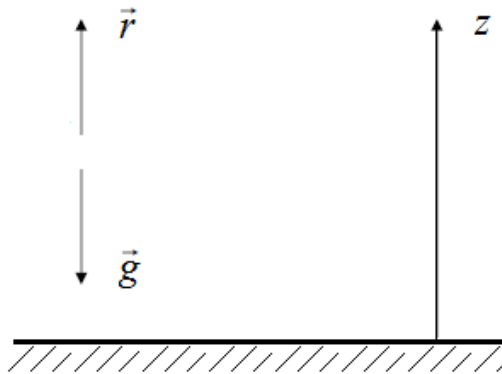
sendo (5.27) a equação da energia na forma não-conservativa.

Anexo 4: (Modos de Energia)

$$e = \left(\hat{u} + \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} - \vec{g} \cdot \vec{r} \right) . \quad (5.28)$$

Obs.3:

$$\vec{g} \cdot \vec{r} = -gz . \quad (5.29)$$



Sendo:

$$\frac{De}{Dt} = \frac{D\hat{u}}{Dt} + \vec{V} \frac{D\vec{V}}{Dt} - \vec{g} \cdot \frac{D\vec{r}}{Dt} \Rightarrow \quad (5.30a)$$

$$\frac{De}{Dt} = \left(\frac{D\hat{u}}{Dt} + \vec{V} \frac{D\vec{V}}{Dt} - \vec{g} \cdot \vec{V} \right), \quad (5.30b)$$

e aplicando (5.30b) em (5.27), temos:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \int_{VC} \rho \left(\frac{D\hat{u}}{Dt} + \vec{V} \frac{D\vec{V}}{Dt} - \vec{g} \cdot \vec{V} \right) dV, \quad (5.31)$$

sendo \dot{Q} o termo associado a condução e radiação (não associados ao escoamento) e, o termo $\frac{D\hat{u}}{Dt}$ correspondente à variação da energia interna.

3.1) Termo de Transferência de Calor (calor transferido por condução):

O mesmo processo poderia ser feito para o caso de calor transferido por radiação.

Tomando \vec{q} como o vetor fluxo de calor [energia / (área · tempo)], e, a taxa de transferência de calor transferido para o VC através da SC dada por:

$$\dot{Q} = - \int_{SC} (\vec{n} \cdot \vec{q}) dA. \quad (5.32)$$

Obs.4:

Assumimos que:

- a) $\dot{Q} > 0 \rightarrow$ calor entra no VC,
- b) $\dot{Q} < 0 \rightarrow$ calor sai do VC.

Relação entre o fluxo de calor e o campo de temperaturas:

Lei de Fourier:

$$\vec{q} = -k \nabla T. \quad (5.33)$$

Obs.5: Ao sairmos de uma região de maior temperatura para uma de menor temperatura (isto é, c/ a temperatura diminuindo em x), então temos $\frac{\partial T}{\partial x}$ negativa.

Substituindo (5.33) em (5.32), temos:

$$\dot{Q} = - \int_{SC} [\vec{n} \cdot (-k\nabla T)] dA . \quad (5.34)$$

e aplicando o Teor. de Gauss, modelamos \dot{Q} na forma de integral volumétrica:

$$\dot{Q} = - \int_{VC} [\nabla \cdot (k\nabla T)] dV . \quad (5.35)$$

3.2) Termo de Trabalho de Superfície (Potência):

Dado por:

$$\dot{W} = - \int_{SC} [\vec{n} \cdot (\tau \cdot \vec{V})] dA . \quad (5.36)$$

Aplicando Teor. de Gauss, temos:

$$\dot{W} = - \int_{VC} \nabla \cdot (\tau \cdot \vec{V}) dV , \quad (5.37)$$

e como:

$$\tau \cdot \vec{V} = \tau_{ij} v_j , \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} ,$$

temos (5.37) da seguinte forma em notação indicial:

$$\dot{W} = - \int_{VC} \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} v_j) dV . \quad (5.38)$$

Finalmente, a equação diferencial da energia é então dada por:

$$\rho \left(\underbrace{\frac{D\hat{u}}{Dt} + \vec{V} \frac{D\vec{V}}{Dt} - \vec{g} \cdot \vec{V}}_{\frac{De}{Dt}} \right) = \underbrace{\nabla \cdot (k\nabla T)}_{\dot{Q}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} v_j)}_{\dot{W}} \Rightarrow \quad (5.39a)$$

$$\rho \underbrace{\frac{D\hat{u}}{Dt} + \rho \vec{V} \frac{D\vec{V}}{Dt}}_A - \underbrace{\rho \vec{g} \cdot \vec{V}}_B = \underbrace{\nabla \cdot (k\nabla T)}_C + \underbrace{v_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}}_{C = \nabla \cdot \tau v_j} + \tau_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} , \quad (5.39b)$$

e agrupando os termos A, B e C, temos:

$$\vec{V} \left(\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} - \nabla \cdot \tau - \rho \vec{g} \right) = 0 , \quad (5.40)$$

que corresponde à equação diferencial da quantidade de movimento (q.d.m.).

O Tensor das tensões:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau'_{ij} , \quad (5.41)$$

sendo o primeiro termo após a igualdade correspondente ao campo estático e o segundo correspondente às tensões relacionadas ao movimento do fluido - tensões viscosas.

De (5.41), assumindo por hipótese $\delta_{ij} = 1$ ($i = j$) e, multiplicando ambos os lados por $\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$, temos:

$$\underbrace{\tau_{ij}}_{\tau : \nabla \vec{V}} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \left(-p\delta_{ij} + \tau'_{ij} \right) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \underbrace{\tau'_{ij}}_{\tau' : \nabla \vec{V}} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \Rightarrow \quad (5.42a)$$

$$\tau : \nabla \vec{V} = -p \nabla \cdot \vec{V} + \underbrace{\tau' : \nabla \vec{V}}_{\Phi} \Rightarrow \quad (5.42b)$$

$$\tau : \nabla \vec{V} = -p \nabla \cdot \vec{V} + \Phi , \quad (5.42c)$$

O termo $-p \nabla \cdot \vec{V}$ corresponde ao trabalho compressão ou expansão – modo reversível de transferência de energia e, o termo Φ representativo da dissipação viscosa –degradação de energia mecânica em energia térmica de maneira irreversível.

Por fim, a partir de (5.39b) temos a **equação diferencial de transporte de energia** dada por:

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) - p \nabla \cdot \vec{V} + \Phi , \quad (5.43)$$

sendo que no lado esquerdo estão os termos de transporte e no lado direito os termos fonte.

Em resumo:

Tabela 2: Equações diferenciais de conservação.

genérica	$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\eta) + \nabla \cdot (\rho\eta\vec{V}) = \nabla \cdot J + \rho S \quad (\text{conservativa})$
da massa	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{V}) = 0$
da q.d.m.	$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \nabla \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau' + \rho\vec{g} \quad (\text{conservativa})$ $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau' + \rho\vec{g} \quad (\text{não conservativa})$
da energia	$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} = \nabla \cdot (k\nabla T) - p\nabla \cdot \vec{V} + \Phi$

Na tabela a seguir as propriedades para cada uma das equações diferenciais:

Na forma genérica, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\eta) + \nabla \cdot (\rho\eta\vec{V}) = \nabla \cdot J + \rho S .$$

Tabela 3: As propriedades para cada uma das equações diferenciais.

Eqs.\Propriedades	η	J	S
da massa	1	0	0
da q.d.m.	\vec{V}	τ_{ij}	\vec{g}
da energia interna	\hat{u}	$k\nabla T$	$\tau_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$
da entalpia	h	q	$\Phi + \frac{D\rho}{Dt}$
da entropia	s	$\frac{q}{T}$	$\Phi - q' \cdot \nabla \left(\frac{1}{T} \right)$

Capítulo 6

Derivação das Equações de Navier-Stokes e Equações Constitutivas

Temos o vetor velocidade:

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} , \quad (6.1)$$

e a equação da q.d.m.:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{F}_S + \vec{F}_B , \quad (6.2)$$

sendo o termo à esquerda da igualdade o de transporte e os termos à direita, \vec{F}_S e \vec{F}_B , correspondentes às forças de superfície e forças de campo, respectivamente, sendo que:

$$\vec{F}_B = \rho g_x \hat{i} + \rho g_y \hat{j} + \rho g_z \hat{k} , \quad (6.3a)$$

e,

$$\vec{F}_S = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} , \quad (6.3b)$$

Obs.1:

O gradiente de pressão é uma força superficial.

Obs.2:

Lembrando que:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot (\nabla \cdot \vec{V}) , \quad (6.4a)$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_S &= -\nabla p + \nabla \cdot \tau' = \\ &= -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \tau'_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} , \end{aligned} \quad (6.4b)$$

$$\vec{F}_B = \rho \vec{g} , \quad (6.4c)$$

As forças de superfície, \vec{F}_S , dependem da taxa na qual o fluido é deformado pelo campo de velocidades. A tarefa é indicar a relação entre tensão e taxa de deformação. A análise será restrita a **fluidos newtonianos e isotrópicos**, para os quais, assume-se que essa **relação é linear**.

Sistema Geral de Tensão em um Corpo Deformável

No elemento paralelepipedico de volume $dx dy dz$ agem tensões resultantes as quais podem ser divididas em F_x , F_y e F_z . As 3 componentes resultantes nas respectivas direções são:

$$\text{Dir. } x : \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} dx \right) dy dz , \quad (6.5a)$$

$$\text{Dir. } y : \left(\frac{\partial F_y}{\partial y} dy \right) dx dz , \quad (6.5b)$$

$$\text{Dir. } z : \left(\frac{\partial F_z}{\partial z} dz \right) dx dy , \quad (6.5c)$$

A força resultante \vec{F}_S por unidade de volume $dx dy dz$ é então:

$$\vec{F}_S = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} . \quad (6.6)$$

Expandindo as grandezas tensoriais acima, F_x , F_y e F_z nos seus componentes normais à superfície, σ , e, cisalhantes, τ , temos:

$$\begin{cases} F_x = \hat{i}\sigma_{xx} + \hat{j}\tau_{xy} + \hat{k}\tau_{xz} \\ F_y = \hat{i}\tau_{yx} + \hat{j}\sigma_{yy} + \hat{k}\tau_{yz} \\ F_z = \hat{i}\tau_{zx} + \hat{j}\tau_{zy} + \hat{k}\sigma_{zz} \end{cases} , \quad (6.7)$$

O sistema de tensões parece requerer 9 quantidades escalares para sua descrição. Essas 9 grandezas formam o **tensor das tensões**, dado então por:

$$\tau = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} , \quad (6.8a)$$

Essa matriz é simétrica, ou seja, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ e $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Assim, a matriz (6.8a) contém apenas 6 componentes diferentes de tensão:

$$\tau = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} . \quad (6.8b)$$

A força de superfície por unidade de volume pode ser calculada a partir das equações (6.6), (6.7) e (6.8):

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_s = & \hat{i} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \rightarrow \text{componente } x \\
 & + \hat{j} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \rightarrow \text{componente } y \\
 & + \hat{k} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \rightarrow \text{componente } z
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 face face face
 yz xz xy

Substituindo (6.9) e (6.3a) em (6.2), tem-se as componentes da equação da q.d.m. formando o seguinte sistema:

$$\begin{cases}
 \rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\
 \rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) , \\
 \rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right)
 \end{cases} \tag{6.10a}$$

isto é:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \nabla \cdot \tau + \rho \vec{g} , \tag{6.10b}$$

ou, em notação indicial:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i . \tag{6.10c}$$

Temos, assim, um sistema de 3 equações contendo 6 tensões. A tarefa, então, é determinar a relação entre elas e a deformação a fim de nos permitir introduzir as componentes de velocidade nas equações do sistema (6.10a).

Decomposição do Movimento

O movimento relativo de uma partícula pode ser decomposto em:

- a) Translação pura;
- b) Dilatação volumétrica;
- c) Deformação angular;
- d) Rotação de um corpo rígido;

Para um regime permanente, uma variação infinitesimal da velocidade ($d\vec{V}$) é dada por:

$$d\vec{V} = \begin{cases} du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{cases} . \quad (6.11)$$

As definições da cinemática para rotação, dilatação volumétrica e deformação angular, são dadas pelas equações a seguir:

Dilatação Volumétrica:

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad (6.12a)$$

$$\dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad (6.12b)$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} ; \quad (6.12c)$$

Deformação Angular:

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \dot{\varepsilon}_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) ; \quad (6.13a)$$

$$\dot{\varepsilon}_{xz} = \dot{\varepsilon}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) ; \quad (6.13b)$$

$$\dot{\varepsilon}_{yz} = \dot{\varepsilon}_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) ; \quad (6.13c)$$

Rotação de Corpo Rígido:

$$\zeta_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad (6.14a)$$

$$\xi_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right); \quad (6.14b)$$

$$\eta_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad (6.14c)$$

sendo que índice duplo indica o plano no qual a deformação ocorre.

A variação do campo de velocidades, $d\vec{V}$, pode então ser reescrita usando as definições anteriormente dadas:

$$\begin{matrix} \left[\begin{matrix} du \\ dv \\ dw \end{matrix} \right] \\ \text{vetor} \\ \text{taxa de} \\ \text{deformação} \end{matrix} = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_{zz} \end{bmatrix}}_{\text{dilatação volumétrica}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yx} & 0 & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zy} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{deformação angular}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\zeta & \eta \\ \zeta & 0 & -\xi \\ -\eta & \xi & 0 \end{bmatrix}}_{\text{rotação do corpo rígido}} \right\} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

sendo esta a representação do **tensor taxa de deformação**.

Interpretação Cinemática de Decomposição do Movimento

A interpretação do campo de velocidade relativa é dada a seguir para cada um dos movimentos isoladamente:

a) Translação pura:

Cinemática de um corpo rígido.

b) Dilatação volumétrica:

O diagrama da Fig. (slide) representa um elemento de fluido ABCD num campo de velocidades unidimensional em x nos instantes t , e, $t + \delta t$.

O retângulo de vértices ADBC terá sua face BC deslocada após um instante $t + \delta t$ de uma distância proporcional a sua velocidade relativa ao ponto A. Nomeando de ϵ_{xx} o deslocamento relativo da fase BC, então:

$$\epsilon_{xx} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dt, \quad (6.16a)$$

e conseqüentemente, nas demais direções:

$$\varepsilon_{yy} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} dy \right) dt , \quad (6.16b)$$

$$\varepsilon_{zz} = \left(\frac{\partial w}{\partial z} dz \right) dt . \quad (6.16c)$$

A taxa de deslocamento nas respectivas 3 direções é dado então por:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\varepsilon_{xx}}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} dx , \text{ na direção } x \\ \dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\varepsilon_{yy}}{dt} = \frac{\partial v}{\partial y} dy , \text{ na direção } y . \\ \dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\varepsilon_{zz}}{dt} = \frac{\partial w}{\partial z} dz , \text{ na direção } z \end{cases} \quad (6.17)$$

Se o elemento expandiu-se nas 3 direções simultaneamente, a variação em volume produzida pela variação linear em face do elemento no lapso de tempo δt é dada por ΔV , onde:

$$\Delta V = V(t + \delta t) - V(t) , \quad (6.18)$$

com $V(t) = dx dy dz$, e,

$$V(t + \delta t) = \left(dx + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} dx dt}_{\substack{\text{deslocam.} \\ \text{em } x}} \right) \left(dy + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y} dy dt}_{\substack{\text{deslocam.} \\ \text{em } y}} \right) \left(dz + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z} dz dt}_{\substack{\text{deslocam.} \\ \text{em } z}} \right) . \quad (6.19)$$

A taxa de expansão volumétrica é dada pelo limite:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{V(t)} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{V(t + \delta t) - V(t)}{\delta t} \right] , \quad (6.20)$$

e assim:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{V} . \quad (6.21)$$

Obs.3:

Para um fluido incompressível, a taxa de dilatação volumétrica é zero, ou seja:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 . \quad (6.22)$$

c) Deformação angular:

O elemento retangular ABCD deforma-se em um paralelogramo A'B'C'D' em δt , porém seu volume é preservado. O ângulo original do vértice A se deforma proporcionalmente aos ângulos γ_{yx} , e, γ_{xy} da forma:

$$\tan \gamma_{yx} \cong \gamma_{yx} = \frac{\overline{C'C}}{\overline{AC}} = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right) dt}{dx}, \quad (6.23a)$$

$$\tan \gamma_{xy} \cong \gamma_{xy} = \frac{\overline{D'D}}{\overline{AD}} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y} dy\right) dt}{dy}. \quad (6.23b)$$

A taxa de deformação do vértice A seria dada pela soma das taxas de variação dos ângulos γ_{yx} , e, γ_{xy} , porém, pela conveniência algébrica que traz a decomposição do campo de velocidades em matriz simétrica e outra anti-simétrica, define-se **a taxa de deformação angular ocorrida no plano xy da Fig. como sendo metade da soma de γ_{yx} , e, γ_{xy}** .

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\epsilon}_{yx} = \frac{1}{2}(\dot{\gamma}_{xy} + \dot{\gamma}_{yx}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right). \quad (6.24)$$

d) Rotação de um corpo rígido:

A rotação da partícula ABCD é proporcional aos ângulos γ_{yx} , e, γ_{xy} indicados na Fig. (slide):

$$\tan \gamma_{yx} \cong \gamma_{yx} = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right) dt}{dx}, \quad (6.25a)$$

$$\tan \gamma_{xy} \cong \gamma_{xy} = \frac{\left(-\frac{\partial u}{\partial y} dy\right) dt}{dy}. \quad (6.25b)$$

Como o elemento possui apenas rotação, o ângulo do vértice A é preservado e, portanto:
 $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$.

Neste caso, as taxas de rotação do elemento no planos são dadas por:

$$\xi = \frac{1}{2}(\dot{\gamma}_{xy} - \dot{\gamma}_{yx}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \rightarrow \text{no plano } xy, \quad (6.26a)$$

$$\zeta = \frac{1}{2}(\dot{\gamma}_{yz} - \dot{\gamma}_{zy}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \rightarrow \text{no plano } yz, \quad (6.26b)$$

$$\eta = \frac{1}{2}(\dot{\gamma}_{zx} - \dot{\gamma}_{xz}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \rightarrow \text{no plano } zx, \quad (6.26c)$$

Note que a **taxa de rotação** corresponde à metade do valor do **rotacional** do campo de velocidades:

$$\text{Rotacional} = \nabla \times \vec{V}, \quad (6.27a)$$

$$\text{Taxa de rotação} = \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{V}) = (\xi \hat{i}, \eta \hat{j}, \zeta \hat{k}). \quad (6.27b)$$

Definimos então a **vorticidade** como sendo duas vezes a taxa de rotação:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}. \quad (6.28)$$

Apresentação dos Resultados Na Forma Tensorial

A decomposição do movimento, expressa na forma matricial, pode ser reescrita em notação tensorial de forma mais compacta.

Definimos o **tensor taxa de deformação** como sendo:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \nabla \vec{V}. \quad (6.29)$$

O tensor taxa de deformação $\dot{\varepsilon}_{ij}$ pode ser decomposto em uma parte simétrica (dilatação pura + deformação angular) e uma parte anti-simétrica (rotação pura). Assim:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \quad (6.30a)$$

ou,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \underbrace{\left[(\nabla \vec{V}) + (\nabla \vec{V})^T \right]}_{\substack{\text{parte simétrica} \\ \text{(parte que se relaciona} \\ \text{com o tensor das tensões)}}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left[(\nabla \vec{V}) - (\nabla \vec{V})^T \right]}_{\text{parte anti-simétrica}} . \quad (6.30b)$$

Equações Constitutivas

1) Fluido estacionário:

Somente as tensões normais são exercidas. O tensor das tensões assume a forma:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} , \quad (6.31)$$

onde p é a pressão termodinâmica do fluido e, é invariante em relação ao referencial ao qual ela está sendo medida. Isto é:

$$I = \underbrace{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}_{\substack{\text{tensões normais} \\ \text{aos planos}}} . \quad (6.32)$$

Para um campo hidrostático $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$:

$$p = -\frac{1}{3} \sigma_{ii} , \quad (6.33)$$

que corresponde à soma das tensões normais.

2) Fluido em movimento:

É conveniente tratar o tensor das tensões τ_{ij} como a soma do tensor estático $-p\delta_{ij}$ (campo estático) e um tensor τ'_{ij} vinculado unicamente à deformação do fluido devido ao seu movimento (tensor desvio ou **tensor viscoso**):

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau'_{ij} . \quad (6.34)$$

Postulados sobre o tensor viscoso τ'_{ij} para um fluido newtoniano:

- i) τ'_{ij} é linearmente relacionado do tensor taxa de deformação $\dot{\varepsilon}_{kl}$ (hipótese fluido newtoniano);
- ii) Não há direções preferenciais no fluido (fluido isotrópico).

Do postulado (i), pode-se escrever τ'_{ij} como uma combinação linear de 9 elementos do tensor das deformações:

$$\begin{bmatrix} \tau'_{11} \\ \tau'_{12} \\ \vdots \\ \tau'_{33} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} K_{1111} & K_{1112} & \cdots & K_{1133} \\ K_{1211} & K_{1212} & \cdots & K_{1233} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{3311} & K_{3312} & \cdots & K_{3333} \end{bmatrix}}_{81 \text{ ctes}} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{12} \\ \vdots \\ \dot{\epsilon}_{33} \end{bmatrix}, \quad (6.35a)$$

ou,

$$\tau'_{ij} = \beta_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l}, \quad (6.35b)$$

sendo β_{ijkl} o tensor de 4ª ordem, e, $\frac{\partial v_k}{\partial x_l}$ o tensor taxa de deformação.

Para um fluido isotrópico, pelo postulado (ii), o número de constantes para definir β_{ijkl} se reduz a apenas dois, o coeficiente de viscosidade dinâmico e o 2º coeficiente de viscosidade, respectivamente: μ , e, λ . Assim:

$$\beta_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (6.35c)$$

Substituindo (6.35c) em (6.35b), obtemos:

$$\tau'_{ij} = \left[\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right] \frac{\partial v_k}{\partial x_l}. \quad (6.35d)$$

Temos o tensor taxa de deformação $\frac{\partial v_k}{\partial x_l}$ da seguinte forma:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_l} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right)}_{\substack{\text{parte simétrica} \\ \text{(dilatação + deformação)}}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right)}_{\substack{\text{parte anti-simétrica} \\ \text{(rotação)}}, \quad (6.36a)$$

mas, devido ao fato de τ'_{ij} ser simétrico (vide eq.(6.8b)), τ'_{ij} será proporcional somente a componente simétrica do tensor das deformações. Consequentemente, não há tensões associadas a um fluido em rotação pura. Dessa forma:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_l} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right)}_{\substack{\text{parte simétrica} \\ \text{(dilatação + deformação)}}} + \frac{1}{2} \cancel{\underbrace{\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right)}_{\substack{\text{parte anti-simétrica} \\ \text{(rotação)}}}}, \quad (6.36b)$$

e aplicando (6.36b) em (6.35d), temos para o tensor viscoso:

$$\tau'_{ij} = \frac{1}{2} \left[\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right] \underbrace{\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right)}_{\substack{\text{parte simétrica} \\ \text{(tensor de deformação)}}}. \quad (6.37)$$

Substituindo (6.37) em (6.34), obtemos a **equação constitutiva para um fluido newtoniano**:

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (6.38a)$$

Tomando por Δ_{ij} a parte simétrica do tensor de deformações, isto é:

$$2\Delta_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad (6.38b)$$

a equação (6.38a) pode ser reescrita na forma matricial. Para um sistema cartesiano, temos:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}}_{\substack{\text{tensor associado} \\ \text{ao campo hidrostático}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \Delta_{xx} & 2\mu \Delta_{yx} & 2\mu \Delta_{zx} \\ 2\mu \Delta_{xy} & \lambda \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \Delta_{yy} & 2\mu \Delta_{yz} \\ 2\mu \Delta_{xz} & 2\mu \Delta_{zy} & \lambda \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \Delta_{zz} \end{bmatrix}}_{\text{tensões associadas à deformação do fluido}} \quad (6.38c)$$

ou, de forma sintética a partir de (6.38a) e (6.38c), temos:

$$\tau_{ij} = (-p + \lambda \nabla \cdot \vec{V}) \delta_{ij} + 2\mu \Delta_{ij}. \quad (6.38d)$$

Então, a partir da equação da q.d.m. e através das equações constitutivas, temos, em notação indicial, as **equações de Navier-Stokes**:

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i. \quad (6.39)$$

Capítulo 7

Percebe-se que os componentes do tensor das tensões, eq. (6.38a), são proporcionais aos coeficientes μ , e, λ . O fator μ é identificado na mecânica dos fluidos como sendo a **viscosidade dinâmica** do fluido. O fator λ é denominado **segundo coeficiente da viscosidade**. A interpretação física de λ gera discussões há mais de um século e meio, entretanto, há consenso quanto ao valor que λ assume na eq. (6.38a). O valor numérico de λ , também chamado de **coeficiente de Stokes**, é determinado através da **hipótese de Stokes**:

$$3\lambda + 2\mu = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}\mu . \quad (7.1)$$

Stokes afirma que a pressão mecânica é igual à pressão termodinâmica.

Pressão Mecânica e o Coeficiente de Viscosidade da Mistura

A **pressão mecânica** é definida como o negativo de um terço do primeiro invariante de τ_{ij} :

$$\bar{p} = -\frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) , \quad (7.2)$$

ou seja, a soma dos 3 componentes normais de um tensor é uma constante invariante de orientação do sistema de referência. Somando-se os termos da eq. (6.38a), e substituindo-os na eq. (7.2), obtemos:

$$\bar{p} = p - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \vec{V} . \quad (7.3)$$

A eq. (7.3) mostra que a pressão mecânica \bar{p} , para um fluido com deformação viscosa, não é igual à propriedade termodinâmica denominada **pressão**:

$$\bar{p} - p = -k \nabla \cdot \vec{V} , \quad (7.4)$$

onde k é denominado **coeficiente de viscosidade da mistura** e, é igual a:

$$k = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) . \quad (7.5)$$

A hipótese de Stokes, eq. (7.1), simplesmente coloca $k \equiv 0$, o que implica em que a pressão mecânica é igual à pressão termodinâmica. Entretanto, o exato significado da eq. (7.4) ainda é controverso.

As Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes (N-S), são obtidas substituindo-se a eq. (6.38a) na eq. diferencial da conservação da q.d.m.:

$$\rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i, \quad (7.6)$$

e substituindo (6.38a) em (7.6):

$$\rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right] + \rho g_i. \quad (7.7)$$

A eq. (7.7) pode ser escrita na forma escalar para as 3 direções.

Considerando um sistema de coordenadas cartesiano, da eq. (7.7), obtemos:

Dir. x :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \nabla \cdot \vec{V} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right], \quad (7.8a)$$

Dir. y :

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \nabla \cdot \vec{V} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right], \quad (7.8b)$$

Dir. z :

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \nabla \cdot \vec{V} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right], \quad (7.8c)$$

As eqs. (7.8a), (7.8b) e (7.8c) representam a eq. da conservação da q.d.m. para um fluido newtoniano na sua forma mais geral. Ela é válida para escoamentos compressíveis ou incompressíveis com os coeficientes de viscosidade podendo variar ou não com a temperatura e pressão.

Condições de Contorno (CC)

As equações de N-S formam um sistema de 3 equações diferenciais parciais não lineares de 2ª ordem. A não linearidade é introduzida pelos termos convectivos. Ela provoca um caráter único nas equações de N-S: para CC distintas, aparecem soluções independentes que não podem ser linearmente superpostas.

Consequentemente, não se conhece até o momento uma solução geral das eqs. de N-S. Pelo fato de serem de natureza elíptica, as CC apropriadas são as condições de Neumann

ou Dirichlet. Fisicamente, isso significa ser necessário ter a informação da velocidade, v_i , ou da taxa de variação da velocidade $\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ para todo o contorno.

1) Interface fluido-sólido.

A velocidade tangencial relativa entre o fluido adjacente à fronteira sólida é nula (condição de não deslizamento).

a) Para uma fronteira sólida estacionária:

$$(v_{\text{fluido}})_{\text{tangencial}} = 0 . \quad (7.9a)$$

b) Para uma fronteira sólida em movimento:

$$(v_{\text{fluido}})_{\text{tangencial}} = (v_{\text{sólido}})_{\text{tangencial}} . \quad (7.9b)$$

A velocidade do fluido normal à fronteira sólida dependerá se essa fronteira é permeável ou não.

2) Interface fluido-fluido.

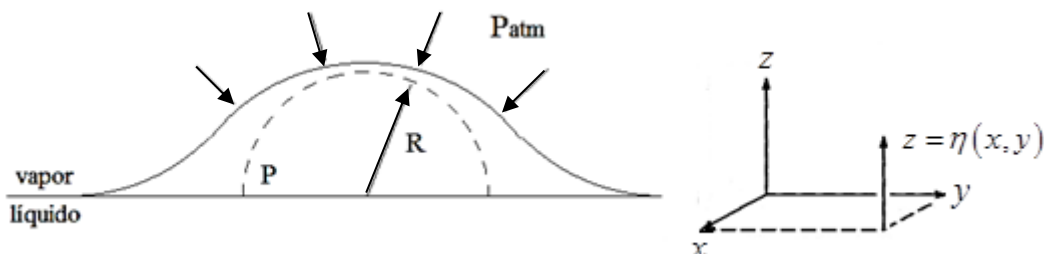
Dois casos:

a) Clássica superfície livre que exerce apenas uma conhecida pressão (Força normal) na interface líquido-gás/vapor.

b) Gás ou vapor também exercem tensões de cisalhamento no líquido.

Considere a superfície livre mostrada na figura a seguir. A forma da superfície é dada por:

$$z = \eta(x, y) . \quad (7.10)$$



Na superfície:

- a) As partículas da fase líquida acompanham a deformação da interface.
- b) A pressão da fase líquida mais os efeitos de tensão superficial devem equilibrar a pressão do vapor.

A velocidade vertical da partícula acompanha o movimento da superfície livre:

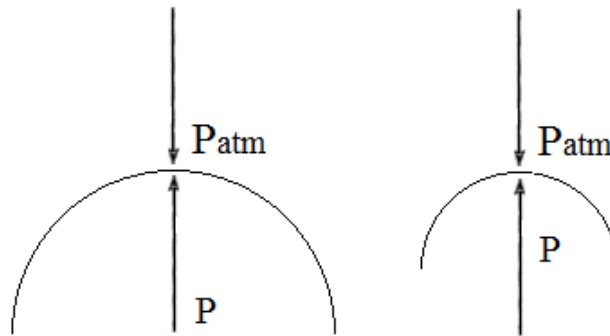
$$w(x, y, \eta) = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} . \quad (7.11)$$

A pressão de equilíbrio é expressa por:

$$p(x, y, \eta) = p_{\text{atm}} + \gamma \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right) , \quad (7.12)$$

onde R_x , e, R_y são os raios de curvatura da superfície e γ é o coeficiente da tensão superficial. Essa relação de pressão expressa pela eq. (7.12) é conhecida como **Equação de Laplace-Young**.

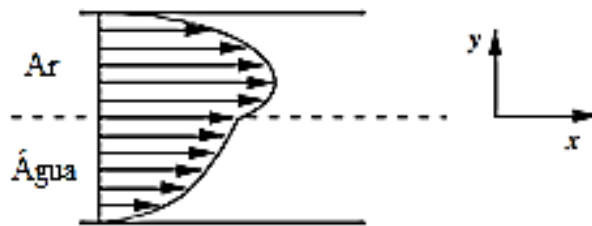
Quanto maior o raio de curvatura, menor a força. Para raio de curvatura menor (curvatura maior), maior será a força.



Quanto menor a bolha, maior a tensão superficial e maior a estabilidade.

As tensões tangenciais através da interface devem ser contínuas. Portanto, a tensão de cisalhamento na interface fica sendo:

$$\tau_{\text{interface}} = \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{\text{líquido (L)}} = \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{\text{vapor (V)}} . \quad (7.13)$$



Pela complexidade introduzida pelos termos não lineares, não se conhece, até o presente momento, uma solução geral para as eqs. de N-S. No entanto, é possível caracterizar os diferentes regimes de escoamento estabelecendo um balanço entre as forças viscosas, os termos convectivos, as forças de pressão, identificar os mecanismos dominantes que governam o escoamento e simplificar as eqs. de N-S. Esta classificação pode ser feita através da adimensionalização das eqs. de N-S.

Adimensionalização

Ex.1: o divergente da velocidade.

Em um escoamento incompressível temos, para o divergente da velocidade:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad . \quad (7.14a)$$

Adimensionalizando:

$$\vec{V}^* = \frac{\vec{V}}{\bar{V}} \Rightarrow \vec{V} = \vec{V}^* \bar{V} \quad , \quad (7.14b)$$

$$\nabla^* = D \nabla \Rightarrow \nabla = \frac{\nabla^*}{D} \quad . \quad (7.14c)$$

Substituindo (7.14b) e (7.14c) em (7.14a), temos:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\nabla^*}{D} \right) \cdot (\vec{V}^* \bar{V}) = 0 \quad , \quad (7.14d)$$

e , multiplicando (7.14d) por $\frac{D}{V}$, temos:

$$\nabla^* \cdot \vec{V}^* = 0 . \quad (7.14e)$$

Ex.2: Semelhança dinâmica (“paraquedas”).

Para o número de Euler (Eu):

$$Eu = f(\text{Re}) , \quad (7.15a)$$

e, o número de Reynolds (Re) para o protótipo (ex.: ar), com:

$$V_p = 100 \text{ m/s} , D_p = 6 \text{ m} , \nu_p = 5,42 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\text{Re}_p = \frac{V_p D_p}{\nu_p} = \frac{100 \cdot 6}{5,42 \cdot 10^{-5}} = 11,07 \cdot 10^6 , \quad (7.15b)$$

e para o modelo (ex.: água), com:

$$V_M = 22,14 \text{ m/s} , D_M = 0,5 \text{ m} , \nu_M = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\text{Re}_M = \frac{V_M D_M}{\nu_M} = \frac{22,14 \cdot 0,5}{1 \cdot 10^{-6}} = 11,07 \cdot 10^6 . \quad (7.15c)$$

Como o número de Reynolds deve ser igual para ambos, o modelo é testado na água para aumentar o respectivo Re.

Obs.1:

As relações no número de Re:

$$\text{Re} = \frac{F_{\text{inércia}}}{F_{\text{viscosa}}} = \frac{\rho L^2 V^2}{\mu L V} = \frac{\rho L V}{\mu} . \quad (7.16a)$$

Obs.2:

A relação no número de Mach:

$$M = \frac{V}{c} , \quad (7.16b)$$

sendo V a velocidade do escoamento e c a velocidade do som.

Escoamentos de acordo com Re

1) Escoamentos com $Re \rightarrow \infty$:

Quando o parâmetro $Re \rightarrow \infty$, há uma indicação de que forças inerciais são balanceadas pelas forças de pressão (escoamento dominado pelas forças inerciais).

Para escoamentos internos, como por exemplo dutos, as forças de campo podem ser incorporadas ao termo de pressão.

$$\hat{p} = p + \rho g_z , \quad (7.17a)$$

$$p^* = \frac{\hat{p} - p_0}{\rho \bar{V}^2} = \frac{(p + \rho g_z) - p_0}{\rho \bar{V}^2} . \quad (7.17b)$$

As eqs. de N-S ficam então adimensionalizadas da seguinte forma:

$$\frac{D\vec{V}^*}{Dt^*} = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} (\nabla^*)^2 \vec{V}^* . \quad (7.17c)$$

Assim, se $Re \rightarrow \infty$, temos que a forma dimensional é dada por:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = -\nabla p + \rho \vec{g} , \quad (7.17d)$$

que corresponde a um sistema de equações diferenciais parciais não lineares de 1ª ordem, aplicado a **escoamentos ideais invíscidos**.

2) Escoamentos com $Re \rightarrow 0$:

O termo viscoso torna-se $(1/Re)$ vezes maior que os termos inerciais e de pressão.

Nesse caso, redefinimos a variável adimensional da pressão:

$$p^* = \frac{p - p_0}{\frac{\mu}{D}} , \quad (7.18a)$$

sendo, no numerador, a força de pressão e, no denominador, a força viscosa.

Assim:

$$Re \frac{D\vec{V}^*}{Dt^*} = -\nabla^* p^* + (\nabla^*)^2 \vec{V}^* . \quad (7.18b)$$

Portanto, quando $Re \rightarrow 0$, temos a seguinte equação adimensional:

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \vec{V} \quad , \quad (7.18c)$$

para um escoamento dominado pela viscosidade, ou, **escoamento de Stokes**.

3) Escoamentos com $0 < Re < \infty$:

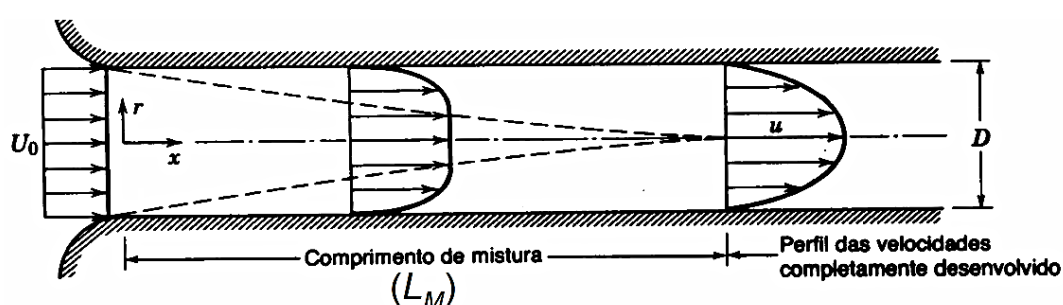
Os termos viscosos são da mesma ordem de grandeza dos termos inerciais e de pressão e, portanto, nenhum dos termos pode ser omitido.

Capítulo 8

Soluções Exatas das Equações de Navier-Stokes (N-S) para Escoamentos Incompressíveis Viscosos

1) Escoamento laminar e em regime permanente entre duas placas paralelas e infinitas.

As partículas fluidas se deslocam na direção x , paralelas às placas e, considerando regime laminar e escoamento plenamente desenvolvido.



Obs.1:

- Se fosse uniforme (invíscido), o escoamento não teria um perfil parabólico;
- A inércia é importante na região de desenvolvimento;
- Um escoamento de perfil parabólico não é uniforme (a viscosidade é importante).

Obs.2:

- $Re < 2000 \rightarrow$ escoamento laminar;
- $Re > 2000 \rightarrow$ escoamento turbulento.

Eqs. governantes:

- Eq. conserv. da massa;
- Eq. conserv. da q.d.m.

Hipóteses simplificadoras:

- Regime permanente;
- Escoamento laminar;
- Escoamento completamente desenvolvido;
- Escoamento incompressível ($\rho = \text{cte}$);
- Dimensão z infinita;
- μ e $\vec{V}_{\text{média}} = \text{ctes}$.

Temos que:

$$v = w = 0. \quad (8.1)$$

Da eq. da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0. \quad (8.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (8.3)$$

Portanto, a componente u da velocidade não depende de x :

$$u = u(y). \quad (8.4)$$

Como o escoamento é permanente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (8.5)$$

e, para placas planas infinitas e paralelas:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (8.6)$$

Aplicando nas eqs. de N-S:

Dir. x :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (8.7)$$

Dir. y :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g. \quad (8.8)$$

Dir. z :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z}. \quad (8.9)$$

As eqs. (8.3), (8.7), (8.8) e (8.9) são as eqs. governantes.

Para encontrarmos a solução, integramos a eq. (8.8):

$$p = p(y) = \int \frac{\partial p}{\partial y} dy = -\rho \int g(y) dy + f_1(x) = -\rho gy + f_1(x) \Rightarrow$$

$$p = -\rho gy + f_1(x) , \quad (8.10)$$

sendo o termo $f_1(x)$ correspondente à perda de carga.

Portanto, a pressão varia hidrosticamente na direção y .

De (8.7), temos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} , \quad (8.11)$$

cte

e integrando duas vezes (8.11):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y + c_1 , \quad (8.12)$$

e por fim:

$$u = u(y) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 + c_1 y + c_2 . \quad (8.13)$$

Condições de Contorno (CC):

A) Para $y = \pm h \rightarrow u = 0$ (condição de contorno de não deslizamento);

B) Para $y = 0 \rightarrow u = u_{\text{máx.}}$, e, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (em $u_{\text{máx.}}$).

Aplicando a CC (B) em (8.12), temos que:

$$c_1 = 0 , \quad (8.14)$$

aplicando a CC (A) em (8.13):

$$c_2 = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) h^2 . \quad (8.15)$$

e substituindo c_2 em (8.13), temos:

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) (y^2 - h^2) . \quad (8.16)$$

Obs.3:

O perfil de velocidades do escoamento entre placas imóveis é parabólico.

Obs.4:

Se as placas tem diferente rugosidade uma da outra, a velocidade não seria máxima no centro, e sim, em algum ponto diferente do centro em y (perfil assimétrico em y).

Vazão:

$$q = \int u(y) dy , \quad (8.17)$$

por unidade de comprimento na direção z .

Velocidade média:

$$\bar{V} = \frac{q}{A} = \frac{q}{2h} . \quad (8.18)$$

Velocidade máxima:

$$u_{\text{máx.}} = u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) (y^2 - h^2) , \text{ em } y = 0 . \quad (8.19)$$

Adicionalmente, de (8.10):

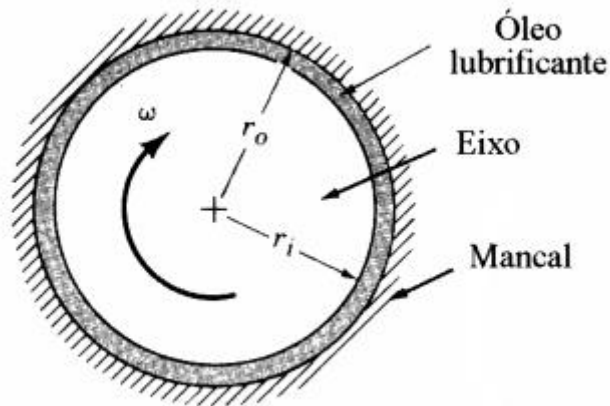
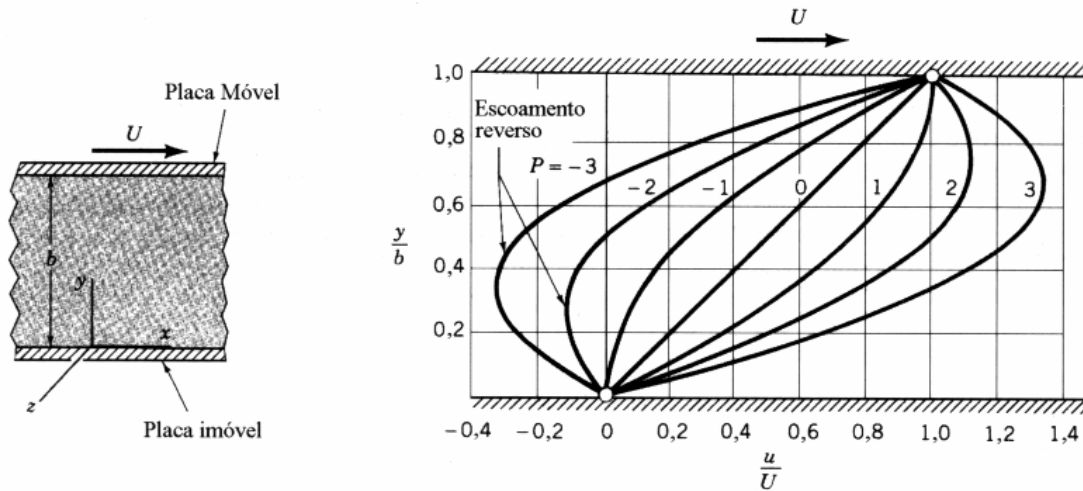
$$f_1(x) = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) x + p_0 , \quad (8.20)$$

onde p_0 é a pressão em $x = y = 0$ (pressão de referência).

Assim, substituindo (8.20) em (8.10), a pressão no fluido pode ser calculada com:

$$p = -\rho gy + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) x + p_0 \quad (\text{campo de pressão}). \quad (8.21)$$

Escoamento de Couette (placas paralelas).



Escoamento paralelo simples entre duas placas paralelas, semelhante ao caso anterior, mas sendo uma fixa e a outra movendo-se com velocidade constante U .

São válidas as mesmas eqs. (8.10) e (8.13) do caso anterior,

$$p = -\rho gy + f_1(x), \quad (8.10)$$

$$u = u(y) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 + c_1 y + c_2, \quad (8.13)$$

porém, com CC diferentes.

Condições de Contorno (CC):

- A) Para $y = 0 \rightarrow u = 0$ (condição de contorno de não deslizamento);
- B) Para $y = b \rightarrow u = U_{\text{placa}}$.

Assim:

$$u = U \frac{y}{b} + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) (y^2 - by) . \quad (8.22)$$

Adimensionalizando:

$$\frac{u}{U} = \frac{y}{b} - \frac{b^2}{2\mu U} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \left(\frac{y}{b} \right) \left(1 - \frac{y}{b} \right) . \quad (8.23)$$

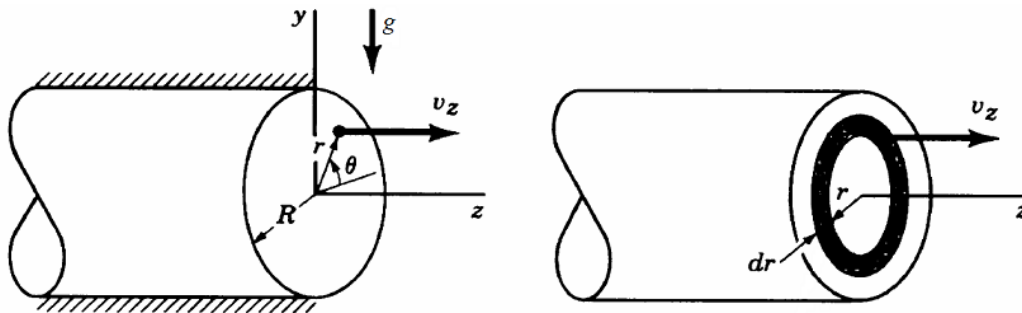
O perfil de velocidades real do escoamento é função do parâmetro adimensional:

$$P = - \frac{b^2}{2\mu U} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) . \quad (8.24)$$

Se $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, a eq. (8.23) torna-se:

$$u = U \frac{y}{b} . \quad (8.25)$$

2) Escoamento de Hagen-Poiseuille.



Provavelmente esta seja a mais conhecida solução exata das eqs. de N-S. São adotadas as coordenadas cilíndricas e admite-se que o escoamento é paralelo à parede do tubo, de modo que $v_r = v_\theta = 0$.

Hipóteses simplificadoras:

1. Regime permanente;
2. Escoamento laminar;
3. Escoamento completamente desenvolvido;
4. Axissimetria;

Obs.5:

O escoamento poderia ter linhas paralelas à parede e em regime não permanente.

Temos que:

$$v_r = v_\theta = 0 . \quad (8.26)$$

Assim, temos para a eq. da continuidade (em coordenadas cilíndricas):

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 . \quad (8.27)$$

Para regime permanente:

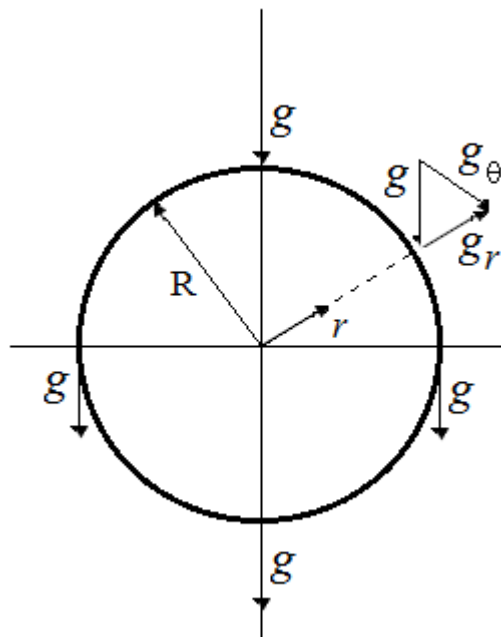
$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0 , \quad (8.28)$$

e, considerando um escoamento axissimétrico (para qualquer raio, a velocidade não varia com θ).

$$\frac{\partial v_z}{\partial \theta} = 0 . \quad (8.29)$$

Então:

$$v_z = v_z(r) . \quad (8.30)$$



As eqs. de N-S ficam então reduzidas a:

Dir. r :

$$0 = \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = \rho g_r . \quad (8.31)$$

Dir. θ :

$$0 = \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \theta} = r \rho g_\theta . \quad (8.32)$$

Dir z :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] , \quad (8.33)$$

onde:

$$g_r = -g \sin \theta , \quad (8.34a)$$

$$g_\theta = -g \cos \theta , \quad (8.34b)$$

com θ medido a partir do plano horizontal.

Integrando a eq. (8.31) ou (8.32), temos:

$$p = -\rho r g \sin \theta + f_1(z) , \quad (8.35)$$

A eq. (8.33) pode ser reescrita então da seguinte forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} . \quad (8.36)$$

Integrando (8.36) para $\frac{\partial p}{\partial z} = \text{cte}$:

$$r \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) r^2 + c_1 , \quad (8.37)$$

e, integrando novamente, temos:

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) r^2 + c_1 \ln r + c_2 . \quad (8.38)$$

Condições de Contorno (CC):

A) Para $r = R \rightarrow v_z = 0$;

B) Para $r = 0 \rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0$.

Aplicando a CC (B) em (8.37):

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \left(\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) r + \frac{c_1}{r} . \quad (8.39)$$

Como v_z deve ser finita, temos que:

$$c_1 = 0 . \quad (8.40)$$

Aplicando a CC (A) em (8.38):

$$c_2 = -\frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) R^2 , \quad (8.41)$$

e, substituindo (8.41) em (8.38):

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) (r^2 - R^2) . \quad (8.42)$$

Vazão:

$$dA = 2\pi r dr , \quad (8.43)$$

$$dQ = v_z dA = v_z 2\pi r dr , \quad (8.44)$$

$$Q = 2\pi \int_0^R v_z r dr . \quad (8.45)$$

Substituindo (8.42) em (8.45), obtemos:

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) , \quad (8.46)$$

e sendo:

$$\frac{\Delta p}{L} = -\frac{\partial p}{\partial z} , \quad (8.47)$$

chegamos à seguinte eq. para a vazão:

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L}, \quad (8.48)$$

conhecida como a **lei empírica de Poiseuille**.

Obs.6:

O sinal negativo na eq. (8.47) deve-se ao fato de que o gradiente de pressão diminui no sentido do escoamento para um escoamento completamente desenvolvido.

Velocidade média:

Utilizando o resultado da eq. (8.48), temos:

$$\bar{V} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R^2 \Delta p}{8\mu L}. \quad (8.49)$$

A velocidade máxima ocorre no eixo central do tubo. Assim, da eq. (8.42), temos que:

$$v_{\text{máx.}} = -\frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{R^2 \Delta p}{4\mu L}, \quad (8.50)$$

de modo que $v_{\text{máx.}} = 2\bar{V}$.

A distribuição de velocidades pode ser escrita em função da velocidade máxima. Dividindo a eq. (8.42) pela eq. (8.50), chegamos a:

$$\frac{v_z}{v_{\text{máx.}}} = 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2. \quad (8.51)$$

Capítulo 9

Regime de Stokes - “Creeping Flows” ($Re \rightarrow 0$)

Escoamentos dominados pela viscosidade.

$$Re = \frac{F_{\text{inerciais}}}{F_{\text{viscosas}}},$$

onde, as forças de inércia \ll forças viscosas.

Escoamentos lentos:

$$Re = \frac{\rho VL}{\mu} \rightarrow 0 .$$

$Re \rightarrow 0$ significa que **as forças viscosas são muito maiores que as forças inerciais**.

Eqs. de N-S Adimensional:

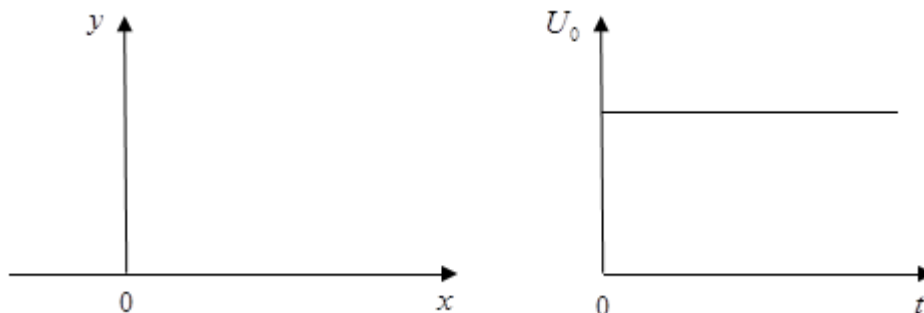
$$Re \frac{D\vec{V}^*}{Dt^*} = -\nabla p^* + \nabla^2 \vec{V}^* . \quad (9.1)$$

A eq. de N-S se reduz a um balanço entre as forças de pressão e viscosas. Na forma adimensional, as eq. de N-S ficam:

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \vec{V} , \quad (9.2)$$

indicando que o transporte de q.d.m. ocorre por difusão de velocidade.

1º Problema de Stokes: Difusão pura.



Placa plana infinita: U_0 é a velocidade da placa, em movimento único.

Em $y = 0$ (na placa):

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \text{ para } t \leq 0 \\ U_0 \text{ para } t > 0 \end{cases} \quad (9.3)$$

Sem os efeitos de borda, só existe velocidade na direção x , i.e., $v = w = 0$ e $\frac{dp}{dx} = 0$.

Assim, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (9.4)$$

que corresponde à **eq. da difusão parabólica** (eq. governante), com as seguintes:

a) Condições de contorno (CC):

$$\begin{cases} u(\infty, t) = 0 \\ u(0, t) = U_0 \end{cases}, \quad (9.5a)$$

b) Condições iniciais (CI):

$$u(y, 0) = 0. \quad (9.5b)$$

Método de solução: solução por similaridade.

Existe uma transformação de variáveis que reduzirá o número de variáveis independentes de 2 para 1.

$$u(y, t) \rightarrow u(\eta), \text{ onde: } \eta = f(y, t). \quad (9.6)$$

O número de CC e CI também será reduzido de 3 para 2.

Seja:

$$\eta = cy^a t^b, \quad (9.7)$$

sendo c , a e b constantes arbitrárias.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} = \frac{du}{d\eta} bcy^a t^{b-1} = \frac{du}{d\eta} \frac{b}{t} cy^a t^b = \frac{du}{d\eta} b \frac{\eta}{t}, \quad (9.8a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} = \frac{du}{d\eta} a c y^{a-1} t^b, \quad (9.8b)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2 u}{d\eta^2} a^2 c^2 y^{2(a-1)} t^{2b} + \frac{du}{d\eta} a(a-1) c y^{a-2} t^b. \quad (9.8c)$$

Combinando as eqs. (9.8a), (9.8b) e (9.8c) na EDP (9.4), temos:

$$\frac{du}{d\eta} b \frac{\eta}{t} = v \left[\frac{d^2 u}{d\eta^2} a^2 c^2 y^{2(a-1)} t^{2b} + \frac{du}{d\eta} a(a-1) c y^{a-2} t^b \right], \quad (9.9)$$

Para haver similaridade, a eq. deve depender de η somente. A escolha dos coeficientes a e b que satisfazem esta exigência é: $a = 1$, $b = -1/2$.

Então, temos:

$$\eta = c \frac{y}{\sqrt{t}}, \quad (9.10a)$$

e, a eq. diferencial de 2ª ordem:

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} + \frac{\eta}{2vc^2} \frac{du}{d\eta} = 0. \quad (9.10b)$$

Fazendo, $2vc^2 = 1/2$, onde c é uma constante arbitrária, temos:

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} + 2\eta \frac{du}{d\eta} = 0, \quad (9.10c)$$

com:

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{vt}}. \quad (9.10d)$$

a) CC:

$$\begin{cases} u(\infty, t) = u(\eta = \infty) = 0 \\ u(0, t) = u(\eta = 0) = U_0 \end{cases}, \quad (9.11a)$$

b) CI:

$$u(y, 0) = u(\eta = \infty) = 0. \quad (9.11b)$$

Integração da EDO (9.10c):

Do cálculo temos que: $\frac{d}{d\eta} [d(\ln c)] = \frac{d}{d\eta} \left(\frac{dc}{c} \right)$.

Então, em (9.10c), temos:

$$\frac{\frac{d}{d\eta}(du/d\eta)}{du/d\eta} = -2\eta \Rightarrow d \left[\ln \left(\frac{du}{d\eta} \right) \right] = -2\eta d\eta . \quad (13.12a)$$

Integrando:

$$\ln \left(\frac{du}{d\eta} \right) = -\eta^2 + c_1 . \quad (9.12b)$$

Aplicando exponencial:

$$\frac{du}{d\eta} = c_2 e^{-\eta^2} . \quad (9.12c)$$

E, integrando novamente para o intervalo de 0 a η , temos:

$$u(\eta) = c_2 \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + c_3 . \quad (9.12d)$$

Função Erro (Estatística):

$$\text{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta , \quad (9.13a)$$

sendo:

$$\begin{cases} \text{erf}(0) = 0 \\ \text{erf}(\infty) = 1 \end{cases} , \quad (9.13b)$$

Aplicando em (9.12d) as condições para η em (9.13b), temos:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 + c_3 = U_0 \Rightarrow c_3 = U_0 \\ u(\infty) &= c_2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 1 + U_0 = 0 \Rightarrow c_2 = -U_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \end{aligned} \quad (9.14)$$

$$u(\eta) = U_0 [1 - \text{erf}(\eta)] , \quad (9.15a)$$

ou, de (9.10d):

$$\frac{u(\eta)}{U_0} = \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right]. \quad (9.15b)$$

O deslocamento U_0 da placa é transmitido às camadas de fluido adjacentes, no tempo e no espaço (direção y), pelo mecanismo da difusão. O espaço e o tempo estão combinados na variável de similaridade dada em (9.10d):

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}.$$

Espessura de Penetração.

Exercício:

Qual é o tempo ou a profundidade δ em y necessários para que a velocidade do fluido seja 1% da velocidade da placa.

Analisando nossa variável adimensional de velocidade:

$$\frac{u}{U_0} = 0,01, \quad (9.16a)$$

$$\left[1 - \operatorname{erf}(\eta^*) \right] = 0,01 \Rightarrow \operatorname{erf}(\eta^*) = 0,99 \Rightarrow \eta^* = 1,83 = \frac{\delta}{2\sqrt{\nu t}} \Rightarrow$$

$$\delta = 3,66\sqrt{\nu t}. \quad (9.16b)$$

A difusão da velocidade u propaga-se a uma distância proporcional a raiz quadrada do produto da viscosidade e do tempo.

Ex.: ar

Dados:

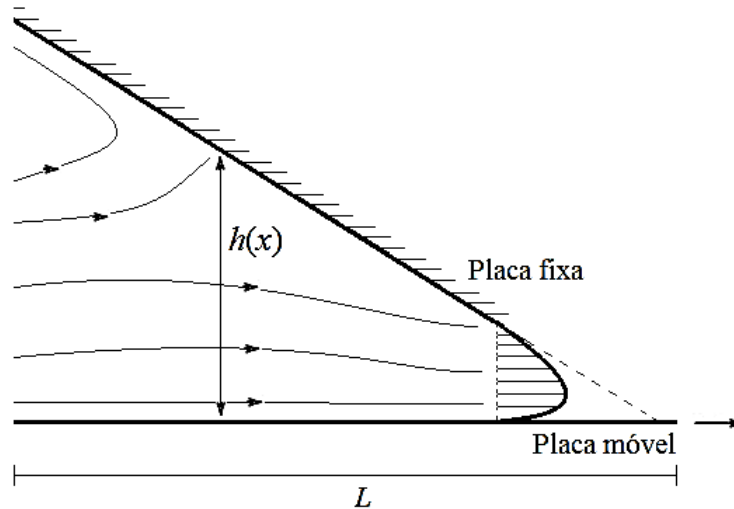
- 1) $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$;
- 2) $t = 60 \text{ s}$.

$$\delta = 3,66\sqrt{(1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s})(60 \text{ s})} = 0,1098 \text{ m} \cong 11 \text{ cm}.$$

Capítulo 10

Teoria da lubrificação de Reynolds

Perfil de velocidades de Couette com o p -negrito (adimensional). Semelhança com o perfil de velocidade de p negativo (entrada) e p positivo (saída).



3) Teoria hidrodinâmica da lubrificação.

Um fenômeno observado em mancais de deslizamento, onde forças viscosas são predominantes.

Como exemplo, usaremos um bloco deslizante movendo-se sobre uma superfície plana, os quais estão levemente inclinados com um ângulo δ entre eles, um em relação ao outro. Analiza-se o problema em 2D. Considerando que o bloco está em descanso e que o plano se move com velocidade $U = \text{cte}$. Ainda a altura $h(x)$ é muito pequena em comparação ao comprimento L do bloco.

Da definição do número de Reynolds (Re):

$$\text{Re} = \frac{\text{força inercial}}{\text{força de viscosa}} \quad (\text{definição mecanicista})$$

Agora vamos usar N-S em coordenadas cartesianas. Note que o escoamento é predominantemente na direção x .

$$\rho \underbrace{\left(\frac{D}{Dt} u \right)}_{\text{força convectiva}} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \underbrace{\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u}_{\text{força difusiva}}, \quad (10.1)$$

e sendo o escoamento bidimensional, $v \sim h$. E como, $h \ll L$, e, $L \sim u$, temos o termo do lado esquerdo da igualdade da eq. (10.1) da forma:

$$\rho \left(\frac{D}{Dt} u \right) = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \overset{=0 (v \sim h)}{\cancel{}} + w \frac{\partial u}{\partial z} \overset{=0 (v=0)}{\cancel{}} \right) \quad (10.2)$$

$$= \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Assim, voltando para o número de Reynolds:

$$\text{Re}^* = \frac{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \xrightarrow[\text{dimensional}]{\text{Análise}} \frac{\rho U^2 / L}{\mu U / h^2} = \frac{\rho U L}{\mu} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \quad (10.3)$$

As forças inerciais podem ser desprezadas se $\text{Re}^* \ll 1$.

Ex.1:

Dados:

- 1) $U = 12 \text{ m/s}$;
- 2) $\nu = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$;
- 3) $L = 10,16 \text{ cm}$;
- 4) $h = 0,2 \text{ mm}$.

Assim, temos:

$$\text{Re}^* = \text{Re} \left(\frac{h}{L} \right)^2 = 32950 (3,87 \cdot 10^{-6}) = 0,1 \quad (10.4)$$

A equação para o regime de Stokes (dominado pela viscosidade, prevalecendo os termos difusivos e eliminando os termos não-lineares):

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (10.5)$$

ou, em 2-D,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (10.6)$$

Sendo $v \ll u$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim 0$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim 0$$
(10.7)

e da conservação da massa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 .$$
(10.8)

Obs.1:

Na direção x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} , \text{ pois } \frac{\partial^2 u / \partial x^2}{\partial^2 u / \partial y^2} \sim \frac{u/L^2}{u/h^2} \ll 1 .$$
(10.9)

Assim, as equações de N-S para regime de Stokes e fluido incompressível ficam reduzidas a:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} .$$
(10.10)

A eq. da continuidade, por sua vez, pode ser expressa por:

$$Q = \int_0^{h(x)} u dy = \text{cte} ,$$
(10.11)

e as CC são:

Condições de Contorno (CC):

- C) Para $y = 0 \rightarrow u = U$;
 - D) Para $y = h \rightarrow u = 0$;
 - E) Para $x = L \rightarrow p = p_0$;
 - F) Para $x = 0 \rightarrow p = p_0$.
- (10.12)

Os perfis de Couette lineares são impossíveis para essa geometria porque a vazão na entrada superaria a vazão na saída.

Para superar essa dificuldade, desenvolve-se uma alta pressão no interior da cunha de fluido, o que causa, inicialmente, um gradiente de pressão adverso e, posteriormente, um gradiente de pressão favorável, ou seja, respectivamente, subtração e adição da solução de Poiseuille.

Assim, a vazão é constante em cada seção x .

Resolvendo:

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y(y-h) + U \left(1 - \frac{y}{h} \right), \quad (10.13)$$

e ainda, da eq. da continuidade:

$$\int_0^{h(x)} \frac{\partial u}{\partial x} dy = - \int_0^{h(x)} \frac{\partial v}{\partial y} dy = -v(h) + v(0) = 0. \quad (10.14)$$

Obs.2:

Como a parede não é porosa, a velocidade na parede deve ser nula.

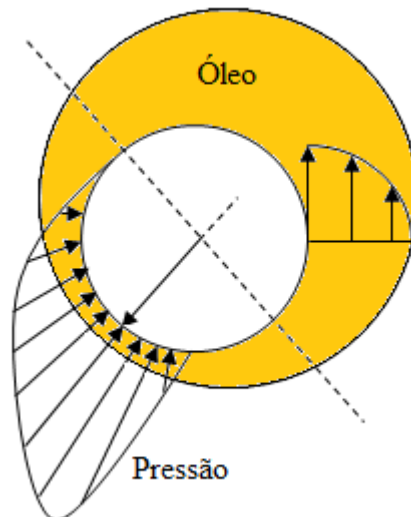
Substituindo a eq.(10.13) na eq.(10.14) e integrando a eq.(10.14), obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (10.15)$$

onde U é constante e, $h(x)$ é conhecido e tem como solução p . Assim, obtém-se finalmente $p(x)$.

Obs.3:

Note que quanto maior a viscosidade, maior será o gradiente de pressão.

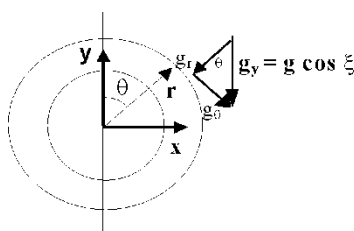
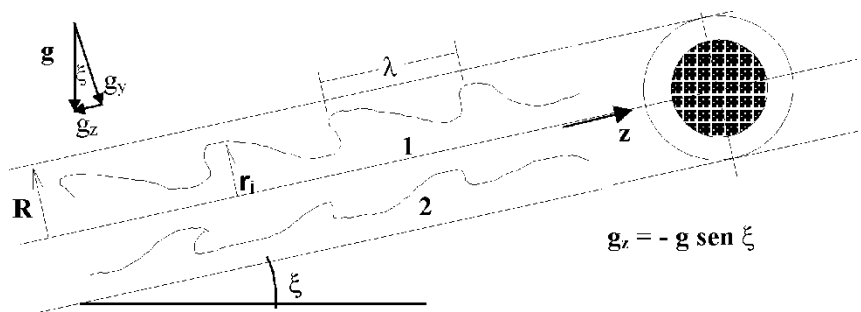


Exemplo: produção de petróleo pesado utilizando o padrão de escoamento líquido-líquido anular (core-flow).

Desenvolveu-se um modelo para a hidrodinâmica do padrão *core-flow*, partindo das equações de Navier-Stokes e baseado na hipótese de que o fluido central (óleo) comporta-se como um sólido deformável, ou seja, possui uma viscosidade infinitamente maior que a do fluido do anel (água). Utilizou-se também a hipótese de anel fino, ou seja, o anel de água se comporta como um filme. Com base nisso, as equações foram adimensionalizadas e simplificadas para o caso particular do *core-flow* vertical ascendente. Uma característica inovadora da modelagem aqui proposta em relação aos modelos da literatura é a inclusão da tensão interfacial líquido-líquido, que permite acoplar as equações das duas fases e determinar a forma da interface como parte da solução geral do problema. Para o completo fechamento das equações a onda interfacial foi considerada geometricamente semelhante. Neste capítulo também são apresentadas as comparações entre os resultados teóricos e os dados experimentais deste trabalho e encontrados na literatura.

Geometria do problema

Parte-se do seguinte esquema (Figura Ex.1) para a formulação das equações para *core flow*:



Onde:

- ρ_1 diferente de ρ_2 ;
- r_1 – posição da interface em relação ao centro do tubo;
- λ – Comprimento de onda;
- $u = V_r$ = velocidade radial;
- $v = V_\theta$ = velocidade azimutal e
- $w = V_z$ = velocidade axial.

Figura Ex.1 – Geometria do problema; *core-flow*

Hipóteses simplificadoras

1. Escoamento incompressível permanente
2. Escoamento laminar em ambas as fases (fluidos Newtonianos)
3. Fluido do núcleo (fase 1) possui uma viscosidade infinitamente maior que o fluido do anel (fase 2) e comporta-se como um sólido deformável com velocidade $V_{z1} = W_c$
4. Anel fino: $R - r_i \ll R$
5. Equações governantes: continuidade e Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas, respectivamente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0$$

e

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right]$$

(direção θ)

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) =$$

$$= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right]$$

(direção z)

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]$$

Análise de ordem de grandeza

Para a simplificação inicial das equações será considerada a hipótese 4 (anel fino). Como exemplo do procedimento de simplificação que será desenvolvido ao longo da modelagem matemática, serão analisados os termos de difusão de quantidade de movimento na direção azimutal das equações da quantidade de movimento para a fase 2 (água) nas

direções θ e z . Os termos são desprezados após a realização de uma análise de ordem de grandeza baseada na hipótese do anel fino. Neste ponto, vale salientar a seguinte nomenclatura:

$$u = V_r; v = V_\theta \text{ e } w = V_z.$$

Tal hipótese leva às seguintes constatações:

$$u_2 \ll v_2 \text{ e } u_2 \ll w_2 \quad \text{e} \quad (\text{Ex.1})$$

$$\delta \ll R \text{ e } \delta \ll \lambda, \quad (\text{Ex.2})$$

onde δ é a espessura do anel de água, λ é o comprimento da onda interfacial e R o raio interno do tubo.

Nas equações da quantidade de movimento para a fase 2 (água) nas direções θ e z , os termos de difusão de quantidade de movimento na direção azimutal são, respectivamente:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad (\text{Ex.3})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} \quad . \quad (\text{Ex.4})$$

Realizando uma análise de ordem de grandeza, percebe-se que os termos das Equações Ex.3 e Ex.4 podem ser traduzidos nas seguintes relações, respectivamente:

$$O\left(\frac{V_{\theta_2}}{R^2}\right) + O\left(\frac{V_{r_2}}{R^2}\right) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad (\text{Ex.5})$$

$$O\left(\frac{V_{z_2}}{R^2}\right) \rightarrow 0 \quad . \quad (\text{Ex.6})$$

Portanto, nas equações da quantidade de movimento para a fase 2 (água) nas direções θ e z , os únicos termos de difusão de quantidade de movimento que permanecem após a análise completa de ordem de grandeza são, respectivamente:

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial r^2} \rightarrow O\left(\frac{V_{\theta_2}}{\delta^2}\right) \rightarrow 1 \quad \text{e} \quad (\text{Ex.7})$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} \rightarrow O\left(\frac{V_{z_2}}{\delta^2}\right) \rightarrow 1 \quad (\text{Ex.8})$$

Numa primeira etapa, a hipótese 4 (anel fino) será utilizada para desprezar apenas os termos relativos à difusão da quantidade de movimento e termos de menor relevância para a análise, como por exemplo os termos relacionados à velocidade radial da equação da quantidade de movimento na direção r . Os termos não lineares ou inerciais ainda serão considerados nas equações da quantidade de movimento nas direções θ e z , buscando com isso a obtenção dos números adimensionais pertinentes ao escoamento *core-flow*.

A hipótese 3 (fluido do núcleo é um sólido deformável) será utilizada para a simplificação das equações para a fase 1. Sendo o escoamento axial e centralizado:

$$u_1 = v_1 = 0$$

Equações gerais para *core-flow*

Adota-se um referencial movendo-se à velocidade das ondas interfaciais, a fim de que as equações possam ser escritas em regime permanente.

Fase 1 (núcleo de óleo):

Equação da quantidade de movimento em r :

$$0 = -\frac{\partial p_1}{\partial r} + \rho_1 g_r, \quad (\text{Ex.9})$$

com $g_r = -g_y \cos \theta$.

Equação da quantidade de movimento em θ :

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p_1}{\partial \theta} + \rho_1 g_\theta, \quad (\text{Ex.10})$$

com $g_\theta = g_y \sin \theta$.

Equação da quantidade de movimento em z :

$$0 = -\frac{\partial p_1}{\partial z} + \rho_1 g_z \quad \begin{cases} g_z = 0 \rightarrow \text{horizontal} \\ g_z = -g \rightarrow \text{vertical} \end{cases}, \quad (\text{Ex.11})$$

Nota: para tubo horizontal $g_z = 0$, $g_y = g$.

Fase 2 (anel de água):

Equação da continuidade

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_2) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0. \quad (\text{Ex.12})$$

Equação da quantidade de movimento em r:

$$0 = -\frac{\partial p_2}{\partial r} + \rho_2 g_r, \quad (\text{Ex.13})$$

lembrando que a velocidade radial é desprezada, pois $u_2 \ll v_2$ e $u_2 \ll w_2$, da hipótese 4.

Equação da quantidade de movimento em θ :

$$\rho_2 \left(u_2 \frac{\partial v_2}{\partial r} + \frac{v_2}{r} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + w_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p_2}{\partial \theta} + \rho_2 g_\theta + \mu_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial r^2} \quad (\text{Ex.14})$$

Equação da quantidade de movimento em z:

$$\rho_2 \left(u_2 \frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{v_2}{r} \frac{\partial w_2}{\partial \theta} + w_2 \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_2}{\partial z} + \rho_2 g_z + \mu_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} \quad (\text{Ex.15})$$

Acoplamento das equações gerais para *core-flow*

Equação de Laplace-Young será utilizada para o acoplamento das equações:

$$p_{1i} - p_{2i} = 2 \frac{\sigma}{R_i}, \quad (\text{Ex.16})$$

onde R_i é o raio de curvatura local da interface (não confundi-lo com r_i , que representa a posição da interface relativa ao eixo do tubo).

Através da hipótese 4, obtém-se as seguintes relações:

$$\begin{cases} R - r_i \ll R \\ r - r_i < R - r_i \ll R \end{cases}$$

Com as magnitudes dadas acima e de acordo com a figura abaixo (Figura Ex.2), chega-se ao seguinte resultado:

$$p_2 = p_{2i} + \rho_2 g_y (r_i - r) \cos \theta \cong p_{2i} \quad (\text{Ex.17})$$

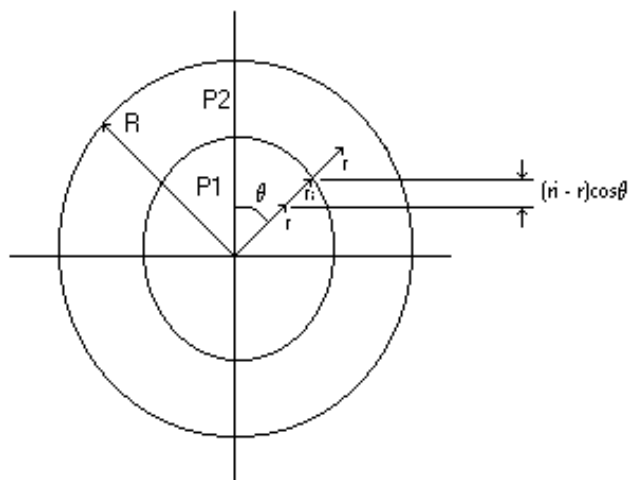


Figura Ex.2 – Seção transversal do escoamento *core-flow*

onde a aproximação se justifica pela consideração de um anel fino (hipótese 4). Portanto:

$$\frac{\partial \hat{p}_2}{\partial \theta} \cong \frac{\partial \hat{p}_{2i}}{\partial \theta} \text{ e} \quad (\text{Ex.18})$$

$$\frac{\partial \hat{p}_2}{\partial z} \cong \frac{\partial \hat{p}_{2i}}{\partial z} \quad (\text{Ex.19})$$

Derivando a Equação Ex.16 em θ e rearranjando:

$$\frac{\partial \hat{p}_{2i}}{\partial \theta} = \frac{\partial \hat{p}_{1i}}{\partial \theta} - 2\sigma \frac{\partial(1/R_i)}{\partial \theta} . \quad (\text{Ex.20})$$

Aplicando a Equação Ex.10 na interface, tem-se que:

$$\frac{\partial \hat{p}_{1i}}{\partial \theta} = \rho_1 r_i g_y \text{ sen } \theta \quad (\text{Ex.21})$$

Portanto, substituindo a Equação Ex.21 na Equação Ex.20 e substituindo o resultado na Equação (Ex.18), tem-se:

$$\frac{\partial \hat{p}_2}{\partial \theta} = \rho_1 g_y r_i \text{ sen } \theta - 2\sigma \frac{\partial(1/R_i)}{\partial \theta} \quad (\text{Ex.22})$$

Analogamente, para a direção z tem-se:

$$\frac{\partial \hat{p}_2}{\partial z} = \rho_1 g_z - 2\sigma \frac{\partial(1/R_i)}{\partial z} \quad (\text{Ex.23})$$

Substituindo as Equações Ex.22 e Ex.23 nas equações de quantidade de movimento para a fase 2 (Equações Ex.14 e Ex.15), tem-se finalmente que:

Em θ :

$$\rho_2 \left(u_2 \frac{\partial v_2}{\partial r} + \frac{v_2}{r_i} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + w_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) = (\rho_2 - \rho_1) g_y \sin \theta + \frac{2\sigma}{r_i} \frac{\partial(1/R_i)}{\partial \theta} + \mu_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial r^2}$$

(Ex.24)

Em z :

$$\rho_2 \left(u_2 \frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{v_2}{r_i} \frac{\partial w_2}{\partial \theta} + w_2 \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) = (\rho_2 - \rho_1) g_z + 2\sigma \frac{\partial(1/R_i)}{\partial z} + \mu_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} \quad (\text{Ex.25})$$

onde a aproximação $r \cong r_i$ foi usada devido à hipótese de filme fino. Fazendo esta mesma consideração na equação da continuidade (Equação Ex.12), tem-se:

$$\frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0, \quad (\text{Ex.26})$$

Condições de contorno

Em r :

$$\begin{array}{llll} r = r_i & u = 0 & v = 0 & w = 0 \\ r = R & u = 0 & v = 0 & w = -a \end{array}$$

onde a é a velocidade da onda interfacial.

Em θ :

$$\begin{array}{lllll} \theta = 0 \text{ ou } & v = 0 & \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 & \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 & \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \\ \theta = \pi & & & & \end{array}$$

Em z :

$$\begin{array}{llll} z = 0 & u|_{z=0} = u|_{z=\lambda} & v|_{z=0} = v|_{z=\lambda} & w|_{z=0} = w|_{z=\lambda} \\ z = \lambda & & & \end{array}$$

Adimensionalização das equações gerais para *core-flow*

São definidas as seguintes variáveis adimensionais:

$$\text{Coordenadas: } \hat{r} = \frac{r - r_i(\theta, z)}{R - r_i(\theta, z)} = \frac{r - r_i(\theta, z)}{\delta(\theta, z)} \quad ; \quad \hat{\theta} = \frac{\theta}{\pi} \quad ; \quad \hat{z} = \frac{z}{\lambda}$$

$$\text{Geometria da interface: } \hat{r}_i = \frac{r_i}{R} \quad ; \quad \hat{R}_i = \frac{R_i(\theta, z)}{R}$$

$$\text{Componentes de velocidade: } \hat{v} = \frac{v_2}{(a\pi R/\lambda)} \quad ; \quad \hat{w} = \frac{w_2}{a}$$

Introduzindo-se essas definições nas Equações Ex.24, Ex.25 e Ex.26, chega-se às equações adimensionais da continuidade e quantidade de movimento para *core-flow*:

Equação da continuidade adimensional:

Substituindo as variáveis adimensionais na Equação Ex.26, chega-se a:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{\hat{r}_i} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{\theta}} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} = 0 \quad (\text{Ex.27})$$

Equações da quantidade de movimento adimensionais:

Em θ :

Substituindo as variáveis adimensionais na Equação Ex.24 e rearranjando, tem-se:

$$\text{Re}_\delta \frac{\delta}{\lambda} \left(\hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{r}} + \frac{\hat{v}}{\hat{r}_i} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{\theta}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{z}} \right) = \frac{\sigma \lambda \delta^2}{a \pi^2 R^3 \mu_2} \left[Eo_{(\pi R^2)} + \frac{1}{\hat{r}_i} \frac{\partial (2/\hat{R}_i)}{\partial \hat{\theta}} \right] + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{r}^2} \quad (\text{Ex.28})$$

onde:

$$\text{Re}_\delta = \frac{\rho_2 a \delta}{\mu_2} \quad \text{e} \quad (\text{Ex.29})$$

$$Eo_{(\pi R^2)} = \frac{(\rho_1 - \rho_2) g_y \text{ sen } \theta \pi R^2}{\sigma} \quad . \quad (\text{Ex.30})$$

Em z :

Substituindo as variáveis adimensionais na Equação Ex.25 e rearranjando, tem-se:

$$\text{Re}_\delta \frac{\delta}{\lambda} \left(\hat{u} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} + \frac{\hat{v}}{\hat{r}_i} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{\theta}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} \right) = \frac{\sigma \delta^2}{a R \mu_2 \lambda} \left[Eo_{(R\lambda)} + \frac{\partial (2/\hat{R}_i)}{\partial \hat{z}} \right] + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{r}^2} \quad (\text{Ex.31})$$

onde:

$$Eo_{(R\lambda)} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)g_z R\lambda}{\sigma} \quad (\text{Ex.32})$$

Analisando as Equações Ex.28 e Ex.31, percebe-se que para a fase 2 os termos inerciais das equações da quantidade de movimento nas direções θ e z poderiam ser desprezados para baixos números de Reynolds no anel (Re_δ) e para os casos onde ocorreria uma onda interfacial longa e próxima da parede da tubulação.

Desprezando as não linearidades, ou melhor, considerando as velocidades azimutal e axial constantes em θ e em z , respectivamente, percebe-se claramente a relação existente entre o número de Eötvös e a curvatura da interface. Portanto, a forma da interface estaria relacionada a um balanço entre a força de Arquimedes e a força de capilaridade. Tal constatação demonstra a necessidade de se levar em conta a tensão interfacial na modelagem do escoamento óleo-água no padrão *core-flow*.

Aplicação das equações gerais ao *core flow* vertical ascendente

As equações governantes desenvolvidas para *core-flow* são particularizadas para o caso vertical ascendente. Nesse caso, devido à axisimetria, tem-se que:

$$v_2 = 0 \quad , \quad (\text{Ex.33})$$

$$g_z = -g \quad \text{e} \quad (\text{Ex.34})$$

$$g_y = 0 \quad . \quad (\text{Ex.35})$$

Substituindo as Equações Ex.33, Ex.34 e Ex.35 em Ex.27, Ex.28 e Ex.31, obtêm-se as seguintes equações:

Continuidade:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{r}} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} = 0 \quad , \quad (\text{Ex.36})$$

Quantidade de movimento:

$$\theta \rightarrow \frac{\partial(2/\hat{R}i)}{\partial \hat{\theta}} = 0 \quad , \quad (\text{Ex.37})$$

ou seja, a seção transversal é circular; e

$$\mathbf{z} \rightarrow \text{Re}_\delta \frac{\delta}{\lambda} \left(\hat{u} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} \right) = \frac{\sigma \delta^2}{aR\mu_2 \lambda} \left[Eo_{(R\lambda)}^V + \frac{\partial(2/\hat{R}_i)}{\partial \hat{z}} \right] + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{r}^2}, \quad (\text{Ex.38})$$

onde:

$$Eo_{(R\lambda)}^V = \frac{(\rho_1 - \rho_2)gR\lambda}{\sigma}. \quad (\text{Ex.39})$$

Simplificação das equações para *core-flow* vertical ascendente – Teoria da Lubrificação

A não inclusão dos termos inerciais simplifica bastante a formulação e já foi realizada anteriormente para *core-flow* horizontal (Oliemans, 1986). Levando em conta a teoria da lubrificação de Reynolds, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$\delta \ll R \text{ e } \delta \ll \lambda$$

Conseqüentemente, ocorre que:

$$\frac{\rho_2 a \lambda}{\mu_2} \frac{\delta^2}{\lambda^2} = \text{Re}_\lambda \frac{\delta^2}{\lambda^2} \ll 1 \quad (\text{Ex.40})$$

A Equação Ex.40 é prerrogativa para a eliminação das não linearidades da Equação Ex.38, ou seja, os termos inerciais podem ser desprezados se a onda interfacial é suficientemente longa e a distância entre a interface e a parede da tubulação é suficientemente pequena.

De acordo com os dados experimentais obtidos neste trabalho, para as maiores frações volumétricas *in situ* do óleo e para os casos onde foi observado o *core-flow* estável (AO ou AOB) a Equação Ex.40 fornece resultados próximos ou apenas ligeiramente menores que a unidade. Apesar disso, considerou-se que para *core-flow* vertical ascendente a onda interfacial é suficientemente longa em comparação com a espessura do anel e, conseqüentemente, os termos inerciais são desprezados. Esta consideração baseou-se nas observações realizadas em laboratório, onde foi constatado que a interface possui uma crista de onda ligeiramente arredondada e simetria axial, ou seja, a onda é periódica na direção *z*. Em outras palavras, não foram observadas assimetrias geradas por campos de pressão decorrentes dos termos inerciais.

Realizando uma análise de ordem de grandeza (nos moldes da análise realizada no tópico Ex.1.3), os termos inerciais da Equação Ex.38 são desprezados. Portanto, após reagrupar convenientemente os termos, tem-se a equação da quantidade de movimento para *core-flow* vertical ascendente (fase 2):

$$\frac{\sigma \delta^2(\hat{z})}{aR\mu_2\lambda} \frac{\partial(2/\hat{R}_i)}{\partial \hat{z}} - \frac{(\rho_2 - \rho_1)g\delta^2(\hat{z})}{a\mu_2} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{r}^2} = 0 \quad (\text{Ex.41})$$

A Equação Ex.41 é uma equação diferencial parcial de segunda ordem em \hat{r} e \hat{z} .

Capítulo 11

Escoamentos com Ausência de Viscosidade ($Re \rightarrow \infty$)

Tal tipo de escoamento é conhecido como **escoamento de Euler** ou **escoamento potencial** e, ocorre quando o efeito dos termos viscosos fica confinado a uma região delgada δ denominada **camada limite**. Note que:

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_L}}, \quad (11.1)$$

com $Re \rightarrow \infty$, e, $\delta \rightarrow 0$.

Nessa condições, as eqs. de N-S, na ausência dos termos viscosos, tornam-se:

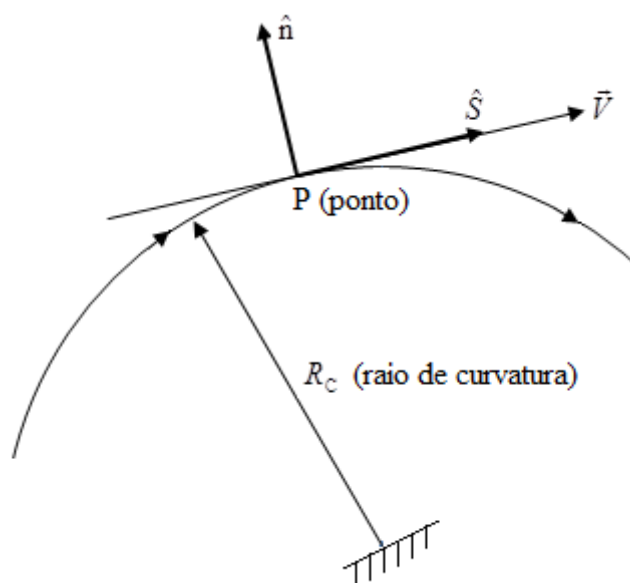
$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = -\nabla p + \rho \vec{g}, \quad (11.2)$$

conhecidas como **eqs. de Euler**.

Eq. de Bernoulli: ausência de efeitos viscosos.

Eq. E. Mecânica: Atrito \rightarrow viscosidade \rightarrow dissipação de energia por atrito / degradação da energia mecânica.

Seja S o comprimento da placa sobre a qual a camada limite se desenvolve (espessura da camada limite).



A Fig. representa uma linha de corrente e um ponto P associado ao sistema coordenado (\hat{S}, \hat{n}) .

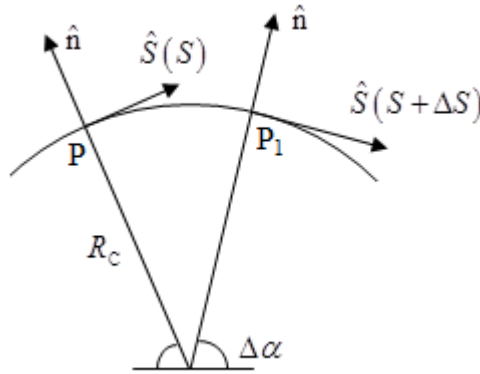
Note que, para este sistema local de coordenadas, o vetor velocidade pode ser expresso por:

$$\vec{V} = (V\hat{S}, \phi\hat{n}) , \text{ com } \phi = 0 ,$$

e a derivada substancial por:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(V\hat{S}) + V \frac{\partial}{\partial S}(V\hat{S}) = \hat{S} \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial \hat{S}}{\partial t} + V^2 \frac{\partial \hat{S}}{\partial S} + V\hat{S} \frac{\partial V}{\partial S} . \quad (11.3)$$

O vetor unitário \hat{S} varia com o tempo e posição. A variação de \hat{S} com S e t , de acordo com a figura a seguir, é dada por:



$$\Delta \hat{S} = -|\hat{S}|(\Delta \alpha)\hat{n} , \quad (11.4a)$$

$$\Delta \hat{S} = (-\Delta \alpha)\hat{n} \cong -\frac{|\Delta S|}{R_c}\hat{n} , \quad (11.4b)$$

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial S} = \lim_{|\Delta S| \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{S}}{\Delta S} = -\frac{\hat{n}}{R_c} \Rightarrow \frac{\partial \hat{S}}{\partial S} = -\frac{\hat{n}}{R_c} , \quad (11.4c)$$

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial t} = -\hat{n} \frac{\partial \theta}{\partial t} . \quad (11.4d)$$

Substituindo (11.4c) e (11.4d) em (11.3), temos:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \hat{S} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial S} \right) + (-\hat{n}) \left(V \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{V^2}{R_c} \right) , \quad (11.5a)$$

Com ρ constante, e agrupando os termos de pressão e gravidade:

$$\tilde{p} = p + \rho g z , \quad (11.5b)$$

temos o gradiente de pressão:

$$\nabla \tilde{p} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial S} \hat{S} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} \hat{n} , \quad (11.5c)$$

e substituindo (11.5a), (11.5b) e (11.5c) na eq. de Euler (11.2), temos:

para \hat{S} :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial S} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial S} , \quad (11.6a)$$

para \hat{n} :

$$V \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{V^2}{R_c} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} . \quad (11.6b)$$

1) Direção tangente à linha de corrente:

Supondo ρ constante (escoamento incompressível), e escoamento em regime permanente e, notando que:

$$V \frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{V^2}{2} \right) , \quad (11.6c)$$

temos:

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\rho \frac{V^2}{2} + \underbrace{p + \rho gz}_{\tilde{p}} \right) = 0 , \quad (11.6d)$$

ou seja:

$$\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho gz = \text{cte} , \quad (11.6e)$$

ou,

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{cte} , \quad (11.6f)$$

sendo esta última a **eq. de Bernoulli** (De N-S, $Re \rightarrow \infty$, e de Euler).

Aplicações: Pressão estática, de estagnação e dinâmica.

A pressão, p , da eq. de Bernoulli é a pressão termodinâmica ou pressão estática. A pressão de estagnação (ou total) é fornecida pelo valor zero da velocidade do escoamento conseguido através de um processo sem atrito.

Aplicando a eq. de Bernoulli:

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + \cancel{gz_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + \cancel{gz_2}, \quad (11.7a)$$

Assim:

$$\underbrace{p_2 = p_0}_{\text{pressão de estagnação}} = \underbrace{p_1}_{\text{pressão estática}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho V_1^2}_{\text{pressão dinâmica}}. \quad (11.7b)$$

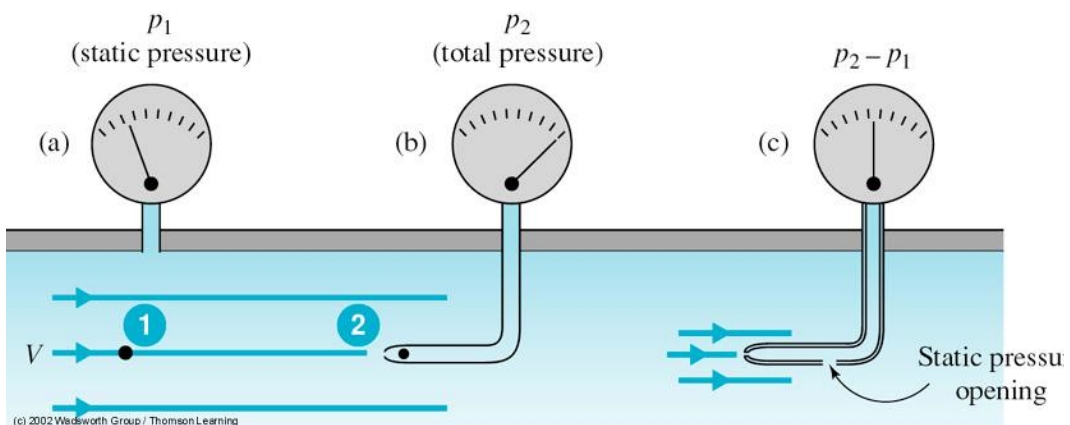
Resolvendo para a pressão dinâmica, temos:

$$p_0 - p = \frac{1}{2}\rho V^2, \quad (11.7c)$$

e, isolando a velocidade:

$$V = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}. \quad (11.7d)$$

Portanto, medindo-se as pressões de estagnação e estática, pode-se obter a velocidade local do escoamento.



Condições necessárias para o uso da Equação de Bernoulli:

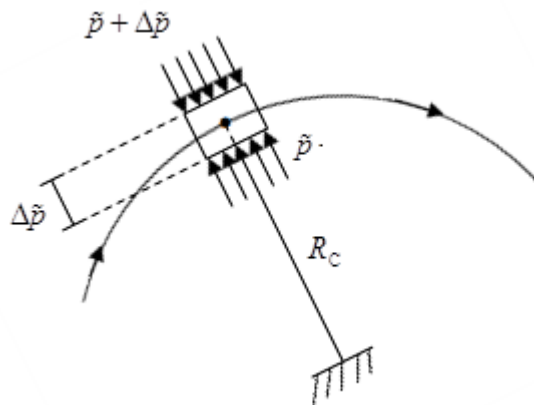
- a) Escoamento em regime permanente;
- b) Escoamento incompressível;
- c) Escoamento invíscido;
- d) Válida através de uma única linha de corrente.

A menor velocidade, maior área, maior pressão.

Para um fluido incompressível, a massa se conserva.

Se a velocidade (vazão) se mantém constante, o que se degrada da energia mecânica é a pressão.

2) Direção normal à linha de corrente:



O balanço entre força centrífuga por unidade de volume e gradiente de pressão normal à linha de corrente.

Da eq. (11.6b):

$$\rho \frac{V^2}{R_c} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n}, \quad (11.8)$$

De acordo com a eq. (11.8), a pressão aumenta no sentido do raio de curvatura R_c . Isto porque o gradiente de pressão $\partial \tilde{p} / \partial n$ é sempre positivo nesse sentido.

Obs.1:

Se R_c tende a infinito, a curvatura tende a zero e $\partial \tilde{p} / \partial n$ também tende a zero.

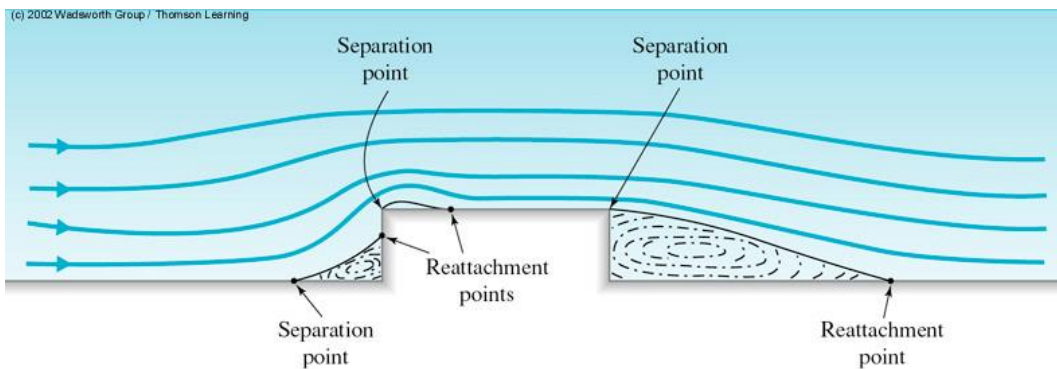
Pode-se então concluir que:

- i) Escoamentos com linhas de corrente paralelas possuem raios de curvatura infinitos ($R_C \rightarrow \infty$):

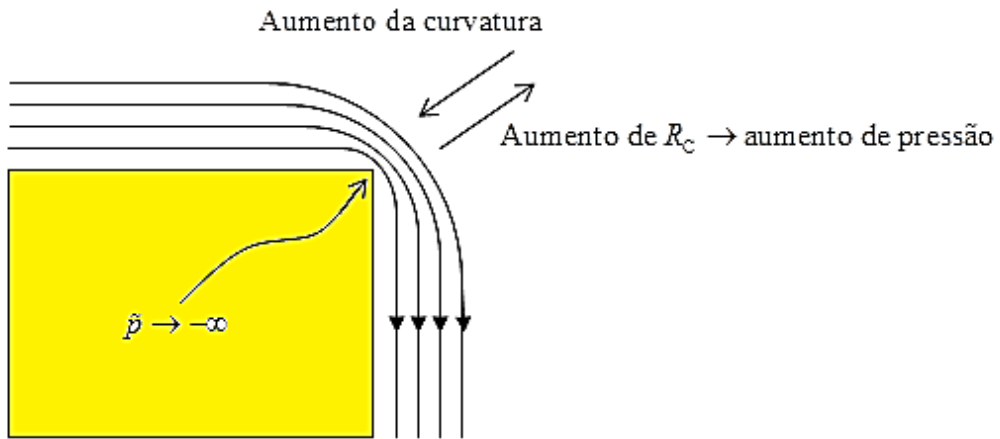
$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} = 0, \text{ ou seja, } \tilde{p} \text{ não varia } (\tilde{p} = \text{cte}).$$



- ii) Escoamentos com linhas de corrente curvas possuem gradientes de pressão normais às linhas de corrente:



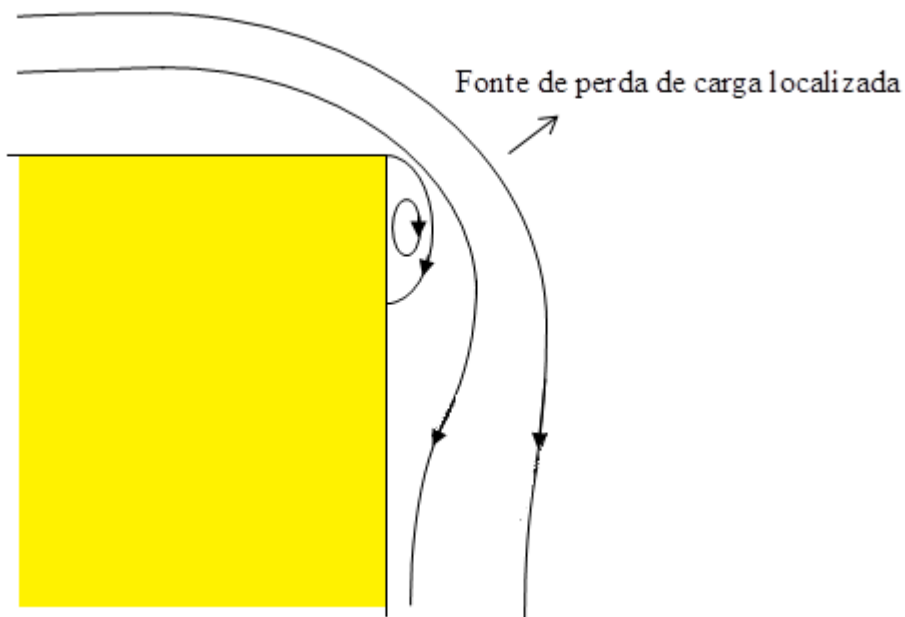
- iii) O escoamento ao redor de uma curva de 90° possui $R_C = 0$, e conseqüentemente, $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} \rightarrow \infty$. Isto requer que tenhamos $\tilde{p} \rightarrow -\infty$. Na realidade isto não ocorre já que os efeitos viscosos devidos à presença da parede sólida evitam que $\tilde{p} \rightarrow -\infty$, e faz com que o escoamento se descole da superfície.



Situação idealizada

Obs.2:

Situação idealizada: para o fluido fazer a curva de 90° é requerido que na quina tenhamos $\tilde{p} \rightarrow -\infty$.



Situação real

Obs.3:

Situação real: o fluido, ao fazer a curva de 90°, descola da superfície sólida e cria uma zona de recirculação. Eventualmente, à jusante, o fluido pode colar-se novamente à parede.

Capítulo 12

Fundamentos de Turbulência

Agradecimentos: ao Prof. Aristeu da Silveira Neto (UFU).

Regime turbulento:

- a) A energia dissipada é muito maior;
- b) É altamente difusivo;
- c) Consome muita energia.

Viscosidade molecular:

- a) Característica de cada substância;
- b) Em um regime turbulento, a viscosidade é maior.

Obs.1:

Para:

- a) Grande escalas: há produção de energia cinética turbulenta;
- b) Pequenas escalas: dissipação de energia cinética.

Em síntese: a energia transferida para as grandes escalas é dissipada pelas escalas menores.

Escalas de Komolgorov

São as menores escalas possíveis em um escoamento turbulento.

Escalas de turbulência

Partimos da escala de comprimento de Komolgorov:

$$\ell_d = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}, \quad (12.1)$$

sendo ν a viscosidade cinemática e ε a dissipação viscosa.

A maior dissipação ocorre em:

$$\ell_d = \frac{1}{k}. \quad (12.2)$$

Modelo da Camada de Mistura de Prandtl:

Energia cinética turbulenta $\sim \frac{d\bar{u}}{dy}$.

Partindo da escala de comprimento de Komolgorov ℓd , devemos chegar à escala de tempo, vorticidade, velocidade e energia.

Obs.2:

A viscosidade dissipa as perturbações. Se há o predomínio da inércia, o regime passa para turbulento.

Temos que:

$$\text{Re} = \frac{\rho V \ell}{\mu} = \frac{V \ell}{\nu}, \text{ e, } \ell d = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}.$$

O número de Reynolds baseado na escala de Komolgorov:

$$\text{Re}_{\ell d} = \frac{u}{\nu} \ell d = 1.$$

Velocidade:

$$u = \frac{\nu}{\ell d} = \frac{\nu}{\frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}}} = \frac{\nu \varepsilon^{1/4}}{\nu^{3/4}} = \nu^{1/4} \varepsilon^{1/4} \Rightarrow u = (\nu \varepsilon)^{1/4}. \quad (12.3)$$

Tempo:

$$t = \frac{\ell d}{u} = \frac{\frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}}}{\frac{\nu^{1/4} \varepsilon^{1/4}}{\varepsilon^{1/4}}} = \frac{\nu^{3/4}}{\nu^{1/4} \varepsilon^{1/4}} = \frac{\nu^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}} \Rightarrow t = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2}. \quad (12.4)$$

Vorticidade:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{\left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2}} = \left(\frac{\varepsilon}{\nu} \right)^{1/2}. \quad (12.5)$$

Energia:

$$(u)^2 = \left[(\nu \varepsilon)^{1/4} \right]^2 = (\nu \varepsilon)^{1/2}. \quad (12.6)$$

Caracterização da Turbulência

A turbulência:

- a) É função do escoamento e não do fluido (não é tabelada);
- b) Dissipa energia a altas taxas;
- c) É rotacional e tridimensional;
- d) É difusivo;
- e) Fenômeno contínuo: por menores que sejam as escalas;
- f) Impredicível: não é possível modelar todas as escalas.

O número de graus de liberdade N_{gl} do escoamento turbulento corresponde ao cubo da relação entre as grandes escalas e as escalas dissipativas. Assim:

$$N_{gl} = \left(\frac{L}{\ell d} \right)^3 = Re^{9/4}. \quad (12.7)$$

Origem da Turbulência

1) Escoamentos cisalhantes livre.

Ausência de parede.

1.1) Camadas de misturas:

- a) Diferentes velocidades no interior do escoamento;
- b) Enrolamento: Kevin Helmholtz;
- c) Desenvolvimento temporal: não há propagação no espaço;
- d) Desenvolvimento espacial: propagação no espaço.

1.2) Jatos;

1.3) Esteira: esteira de Von Karman.

2) Escoamento parietal.

2.1) Camada limite:

- a) Placa plana: ondas Tollmien-Schlichting (senoidal crista-vale);
- b) A camada limite aumenta de maneira intensa;
- c) Escoamento na camada limite: próximo à parede.

Capítulo 13

Regime turbulento: desprezados os efeitos viscosos (pequenas áreas).

Após o comprimento da mistura L_m , o perfil não muda mais.

$$\text{Re} = \frac{\text{Força inercial}}{\text{Força viscosa}} = \frac{\rho V D}{\mu} . \quad (13.1)$$

Ex.: Água-glicerina.

A água necessita maior comprimento ($\mu_{\text{água}} \ll \mu_{\text{glic.}}$) pois é maior o efeito inercial.

O escoamento turbulento é mais dissipativo (como se fosse mais viscoso) e, nesse caso, a força viscosa é maior que a força inercial.

No caso de termos 2 escoamentos com igual Re, sendo um laminar e o outro turbulento, o turbulento precisará de um menor comprimento de mistura.

Vale a relação:

A maior velocidade \rightarrow o maior comprimento L_m e a menor a viscosidade.

Ex.1:

$$\mu_{\text{água}} = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} ,$$

$$\text{Re} = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} = \frac{\rho \left(\frac{Q}{A} \right) D}{\mu} = \frac{\rho \left(\frac{(V/t)}{A} \right) D}{\mu} . \quad (13.2a)$$

Sendo $A = \frac{\pi R^2}{4}$, temos:

$$\text{Re} = \frac{\rho \left(\frac{(V/t)}{\left(\frac{\pi D^2}{4} \right)} \right) D}{\mu} = \frac{\rho (V/t) 4}{\mu \pi D} \quad (13.2b)$$

$$= \frac{1000 (6,6 \cdot 10^{-7}) 4}{10^{-3} \pi D} .$$

Hipóteses:

7. Escoamento completamente desenvolvido;
8. Aplicamos a lei de Poiseuille: lei de resistência ao escoamento em tubos.

$$\mu = \frac{\pi R^4 \Delta p}{Q 8 L} \quad (13.3)$$

$$= \frac{\pi (0,0005)^4}{(6,6 \cdot 10^{-7}) 8} \left(\frac{\rho g H}{1,2} \right) = 0,08 \cdot 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}.$$

onde $\frac{\Delta p}{L}$ é a queda de pressão calculada entre 1 e 2 utilizando a eq. de Bernoulli.

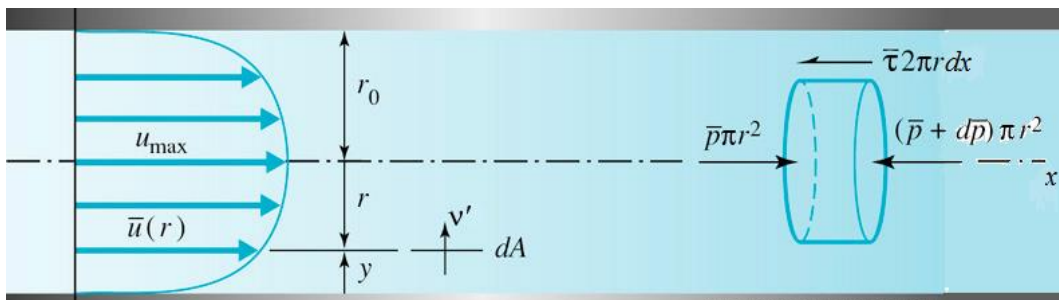
a) $\left(\frac{p_e / \rho g}{\bar{V}^2 / 2g} \right);$

b) $\text{Re} = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} = \frac{100(0,84)(0,0001)}{0,06 \cdot 10^{-4}} = 1400 \Rightarrow$

$\text{Re} < \text{Re}_{\text{crítico}} = 2000;$

c) $L_m = 0,065 \text{ Re} \cdot D = 0,065 \cdot 1400 \cdot 0,001 = 0,091 \text{ m}.$

A partícula mantém a quantidade de movimento. Ela retarda a velocidade da camada superior.



Obs.1:

Uma velocidade v' negativa produz u' positiva.

Uma velocidade v' positiva produz u' negativa.

Temos que:

$$\bar{\tau} = (\mu + \mu_t) \frac{d\tilde{u}}{dy}, \quad (13.4a)$$

onde o termo $\mu_t \frac{d\tilde{u}}{dy}$ corresponde à tensão de cisalhamento turbulenta, ou, tensão de Reynolds.

$$\bar{\tau} = \overline{\rho u'v'}, \quad (13.4b)$$

sendo que $\overline{u'v'}$ compõe fisicamente a tensão cisalhante (função do escoamento).

Hipóteses Teóricas para o Cálculo de Escoamentos Turbulentos

Devido à extrema complexidade do movimento turbulento, não há teoria unificadora que nos permita calcular as velocidades médias no tempo. Elas se completam através de medições experimentais, o que caracteriza dependência caso a caso, *i.e.*, teorias semi-empíricas para a dedução das idéias físicas fundamentais ainda desconhecidas.

Hipótese de Boussinesq (1877 e 1896)

Lembrando que, para escoamento laminar:

$$\tau_t = \mu \frac{du}{dy}. \quad (13.5a)$$

Ele introduziu o coeficiente de mistura μ_t para a tensão de Reynolds em escoamento turbulento:

$$\tau_t = -\overline{\rho u'v'} = \mu_t \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (13.5b)$$

onde μ_t é chamado de **viscosidade aparente, virtual** ou **turbulenta**.

Obs.2:

Problema: μ_t não é propriedade do fluido, mas, depende da velocidade média \bar{u} .

Analogamente ao escoamento laminar, a viscosidade cinemática turbulenta é dada por:

$$v_t = \frac{\mu_t}{\rho} \Rightarrow \mu_t = \rho v_t, \quad (13.5c)$$

e como, de (13.5a):

$$\tau_t = \rho v \frac{du}{dy}, \quad (13.5d)$$

temos:

$$\tau_t = \rho v_t \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (13.5e)$$

Teoria do Comprimento de Mistura de Prandtl

Para escoamento turbulento homogêneo isotrópico: $u' = v' = w'$.

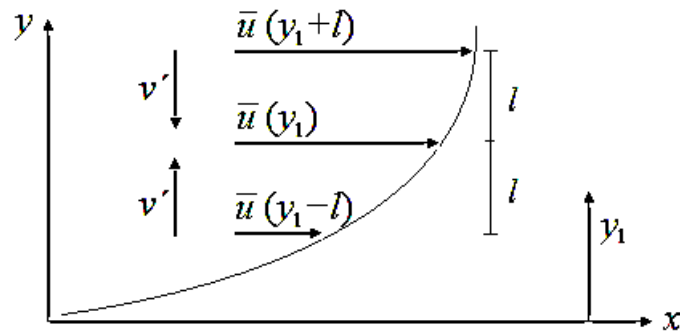
Os avanços de Prandtl (1925) são estudados para o caso de escoamento paralelo: $\bar{u} = \bar{u}(y), \bar{v} = 0$, e, $\bar{w} = 0$.

Assim, somente há:

$$\tau'_{xy} = \tau_t = -\overline{\rho u'v'} = \mu_t \frac{d\bar{u}}{dy} . \quad (13.6)$$

O comprimento de mistura ℓ é a distância na direção transversal y que deve ser coberta por uma aglomeração de partículas de fluido (vórtice) viajando com sua velocidade média para que a diferença entre sua velocidade axial e a velocidade da nova lâmina seja da mesma ordem da flutuação transversal.

Média em escoamento turbulento.



Temos, através de expansão em série de Taylor, que:

$$\Delta u_1 = \bar{u}(y_1) - \bar{u}(y_1 - \ell) \cong \ell \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_1 , \quad (13.7a)$$

$$v' > 0 . \quad (13.7b)$$

e,

$$\Delta u_2 = \bar{u}(y_1 + \ell) - \bar{u}(y_1) \cong \ell \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_1 , \quad (13.7c)$$

$$v' < 0 . \quad (13.7d)$$

Assim, a média no tempo do valor absoluto dessa flutuação é:

$$\sqrt{\overline{(u')^2}} = \overline{|u'|} = \frac{1}{2}(|\Delta u_1| + |\Delta u_2|) = \ell \left| \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_1 \right| \Rightarrow$$

$$\overline{|u'|} = \ell \left| \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_1 \right|. \quad (13.8)$$

Vórtices turbulentos que colidem em uma lâmina y_1 com velocidade $2u'$, assim como vórtices se afastam com velocidade $2u'$, tem o espaço vazio entre eles preenchido pelo fluido da vizinhança.

Percebemos o surgimento de uma componente de velocidade transversal nos dois sentidos de y_1 . Esse argumento implica que a componente transversal v' é da mesma ordem de magnitude de u' .

$$\overline{|v'|} = c_1 \overline{|u'|} = c_1 \ell \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|, \quad (13.9a)$$

sendo c_1 uma constante. Ou seja:

$$\overline{|v'|} = c_1 \ell \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (13.9b)$$

Temos que $\overline{u'v'}$ é diferente de zero e negativo. Portanto, sendo c_1 também uma constante, temos:

$$\overline{u'v'} = -c_2 \overline{|u'|} \cdot \overline{|v'|}, \quad (13.10)$$

Combinando as eqs. (13.8), (13.9b) e (13.10):

$$\overline{|u'|} \cdot \overline{|v'|} = \ell \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right) c_1 \ell \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right) = c_1 \ell^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2, \quad (13.11)$$

e,

$$\overline{u'v'} = -c_1 c_2 \ell^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \Rightarrow \overline{u'v'} = -c_3 \ell^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2, \quad (13.12a)$$

e, incluindo a constante $c_3 = c_1 c_2$ no comprimento ℓ de mistura:

$$\overline{u'v'} = -\ell^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2. \quad (13.12b)$$

Assim, a tensão cisalhante, como definida por Boussinesq, pode ser escrita como:

$$\tau_t = \rho \ell^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2, \quad (13.13a)$$

e, para computar a mudança no sinal de $\frac{d\bar{u}}{dy}$:

$$\tau_t = \rho \ell^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (13.13b)$$

eq. essa conhecida como a **Hipótese do comprimento de mistura de Prandtl**.

Comparando a eq. (13.13b) com a hipótese de Boussinesq, temos a viscosidade aparente dada por:

$$\mu_t = \rho \ell^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|, \quad (13.14a)$$

e, a viscosidade cinemática aparente, presente na eq. (13.5e), dada por:

$$\nu_t = \ell^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|. \quad (13.14b)$$

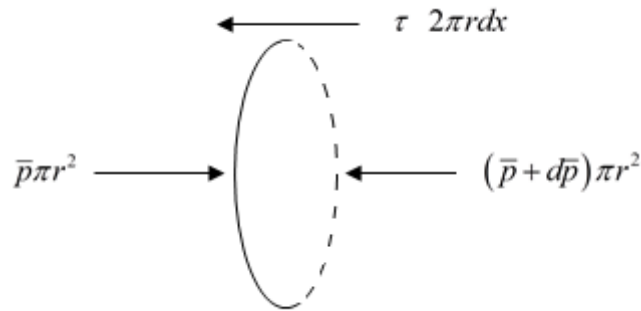
O comprimento de mistura não é ainda uma propriedade do fluido, mas uma função puramente local. É possível, em muitos casos, estabelecer uma relação simples entre o comprimento de mistura e um comprimento característico do escoamento em questão.

Ex.: Nas paredes de tubos lisos, $\ell \rightarrow 0$, pois os movimentos transversais são inibidos pela presença da parede. Em tubos rugosos, e próximo à parede, ℓ assume a ordem de magnitude dos elementos de rugosidade.

Aplicações bem sucedidas da eq. de Prandtl:

- a) Em escoamentos turbulentos ao longo de paredes, como, tubos, canais, placas, camada limite;
- b) Em escoamentos turbulentos livres, como mistura de um jato com o ar estático ao redor.

Balço perfeito entre tensão e gradiente de pressão.



Fazendo um balanço de forças para um elemento cilíndrico, escoamento paralelo e completamente desenvolvido, temos:

$$\bar{\tau} = -\frac{r}{2} \frac{d\bar{p}}{dx} = r \frac{\Delta\bar{p}}{2L} . \quad (13.15)$$

A tensão cisalhante turbulenta e a viscosidade na parede são iguais a zero.

A rugosidade afeta a tensão cisalhante e a dissipação de energia.

Leis Universais de Distribuição de Velocidade

Lei de distribuição de velocidades de Prandtl.

Hipóteses de distribuição de velocidades de Prandtl:

- i) Variação linear do comprimento ℓ com distância y da parede e a constante χ (ajustada experimentalmente):

$$\ell = \chi y , \quad (13.16)$$

sendo, y a distância da parede. Assim, temos a eq. (13.13a) da seguinte forma:

$$\tau_t = \rho \chi^2 y^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 , \quad (13.17)$$

para canais e tubos.

ii) Tensão cisalhante na parede:

$$\tau = \text{cte} = \tau_0 . \quad (13.18)$$

É válida na região turbulenta próxima à região de parede, ou seja, $\tau_{\text{total}} = \tau_t$. Assim, a velocidade de atrito é dada por:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} , \quad (13.19a)$$

e, substituindo (13.19a) em (13.17), temos:

$$u_\tau^2 = \chi^2 y^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 , \quad (13.19b)$$

ou,

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{u_\tau}{\chi y} . \quad (13.20)$$

Integrando a eq. (13.20):

$$\bar{u} = \frac{u_\tau}{\chi} \ln y + c . \quad (13.21)$$

A eq. (13.21) é extrapolada para toda a região. Para $y = h$, $\bar{u} = u_{\text{máx.}}$:

$$u_{\text{máx.}} = \frac{u_\tau}{\chi} \ln h + c , \quad (13.22)$$

e conseqüentemente, das eqs. (13.22) e (13.21), temos:

$$\frac{\bar{u}_{\text{máx.}} - \bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\chi} \ln \frac{h}{y} , \quad (13.23)$$

que corresponde ao **perfil de velocidades universal de Prandtl**, sendo h a largura do canal, e, y a distância a partir da parede. Nesse caso, quando:

$$\begin{aligned} y = R &\rightarrow u = u_{\text{máx.}} \quad (\text{centro do tubo}). \\ y = 0 &\rightarrow u = 0 \quad (\text{parede}). \end{aligned} \quad (13.24)$$

Capítulo 12

cont. da Capítulo 13.

Tubo liso ou rugoso: depende da condição hidrodinâmica.

Prandtl: Teoria cinética dos gases.

Para tubo liso ou rugoso:

a) Região da parede:

- Tensão turbulenta + tensão laminar (subcamada viscosa);
- Não há flutuação na parede.

b) Entre linha de centro e subcamada viscosa:

- Região turbulenta predominante.

Definição da velocidade de atrito.

A velocidade característica do vórtice (turbulenta) u_τ é a indicação da intensidade cinética da turbulência.

De (13.5b), temos:

$$\bar{\tau}_t = -\rho \overline{u'v'} \Rightarrow \frac{\bar{\tau}_t}{\rho} = -\overline{u'v'} = \sqrt{(\overline{u'v'})^2} = |\overline{u'v'}| \Rightarrow \quad (13.1a)$$

e, portanto:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_t}{\rho}} = \sqrt{|\overline{u'v'}|} \quad [\text{m/s}]. \quad (13.1b)$$

Para a determinação da constante c de integração na eq. (13.21), consideramos que $\bar{u} = 0$ a uma distância y_0 da parede. Assim:

$$\bar{u} = \frac{u_\tau}{\chi} (\ln y - \ln y_0), \quad (13.2a)$$

onde y_0 é da ordem de magnitude da espessura da subcamada viscosa, δ_v (os vórtices não ultrapassam δ_v). Da análise dimensional, y_0 é proporcional à razão ν/u_τ , que é a dimensão do comprimento da subcamada viscosa. Então:

$$y_0 = \beta \frac{\nu}{u_\tau}. \quad (13.2b)$$

Substituindo (13.2b) em (13.2a), temos:

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\chi} \left(\ln \frac{yu_\tau}{\nu} - \ln \beta \right), \quad (13.2c)$$

que é a chamada **lei de distribuição logarítmica dimensional** onde, χ é a constante universal do escoamento turbulento e β depende da natureza da parede (lisa ou rugosa - experimental).

Fazendo então: $\frac{\bar{u}}{u_\tau} = u^*$, e, $\frac{yu_\tau}{\nu} = y^*$, temos:

$$u^* = A_1 \ln y^* + B_1, \quad (13.3)$$

onde:

$$A_1 = \frac{1}{\chi} = 2,5, \text{ e, } B_1 = \frac{1}{\chi} \ln \beta.$$

A eq. (13.3) é válida para números de Re altos e para canais ou tubos.

Para números de Re pequenos, quando a fricção laminar exerce influência mesmo fora da subcamada viscosa, experimentos levam a uma lei de potência da forma:

$$u^* = Cy^*, \quad (13.4a)$$

ou,

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = C \left(\frac{yu_\tau}{\nu} \right)^n, \quad (13.4b)$$

a Lei de Potência, sendo o expoente $n = 1/7$.

Aplicando os dados de J. Nikuradse para ajustar as constantes da eq. (13.3), temos:

$$A_1 = 2,5, \quad B_1 = 5,5, \quad \chi = 0,4 \text{ e } \beta = 0,111. \quad (13.5)$$

Assim, para tubo liso, temos:

$$u^* = 2,5 \ln y^* + 5,5, \quad (13.6)$$

relação essa válida para números de Re altos (quando a tensão cisalhante é dominada pela turbulência) e antes da subcamada viscosa.

Na subcamada viscosa, onde o cisalhamento laminar predomina, a velocidade é muito pequena (os redemoinhos não penetram essa camada).

Com:

$$\tau_0 = \rho u_\tau^2 = \mu \frac{u}{y} \Rightarrow \frac{u}{u_\tau} = y \frac{u_\tau}{(\mu/\rho)} = y \frac{u_\tau}{\nu} \Rightarrow \frac{u}{u_\tau} = y \frac{u_\tau}{\nu}, \quad (13.7a)$$

ou,

$$u^* = y^*, \quad (13.7b)$$

sendo que as eqs. (13.7a) e (13.7b) são válidas somente dentro da subcamada viscosa.

Dessa forma, temos para $y^* = y \frac{u_\tau}{\nu}$, as leis de parede:

$$y^* < 5, \text{ fricção puramente laminar (subcamada viscosa);} \quad (13.8a)$$

$$5 < y^* < 70, \text{ fricção laminar-turbulenta (Lei de Rechartd);} \quad (13.8b)$$

$$y^* > 70, \text{ fricção puramente turbulenta (tensão turbulenta dominante).} \quad (13.8c)$$

Assim, a espessura da subcamada viscosa, quando $y^* = 5$ é dada por:

$$y = \delta_v \approx 5 \frac{\nu}{u_\tau}. \quad (13.8d)$$

Redução da dependência do comprimento de mistura ℓ com y , a partir dos experimentos. Da hipótese de Prandtl, eq. (13.13a):

$$\tau_t = \rho \ell^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2, \quad (13.9a)$$

aplica-se uma distribuição linear de tensão cisalhante para calcular o perfil de velocidades:

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{r_0} \right), \quad (13.9b)$$

com,

$$\begin{cases} y = r_0 \rightarrow \tau = 0 \\ y = 0 \rightarrow \tau = \tau_0 \end{cases}. \quad (13.9c)$$

Calcula-se a variação do comprimento de mistura ℓ/r_0 diretamente das eqs. (13.9a) e (13.9b), e da distribuição de velocidades $u(y)$ medida por Nikuradse.

Assim, para o comprimento $\ell(y)$:

a) da parede ao centro:

$$\frac{\ell}{r_0} = 0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{y}{r_0}\right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{y}{r_0}\right)^4, \quad (13.10a)$$

seja para tubo liso ou rugoso, com:

$$\begin{cases} \text{Re} > 10^5, \text{ e,} \\ 0 < \frac{y}{r_0} < 1. \end{cases} \quad (13.10b)$$

b) próximo da parede:

$$\ell = 0,4y - 0,44 \frac{y^2}{r_0}, \quad (13.11a)$$

i.e. $\ell = \chi y$, e, $\chi = 0,4$ quando $y \approx 0$.

Por simplicidade:

$$\ell = \chi y f\left(\frac{y}{r_0}\right), \quad (13.11b)$$

onde: $f\left(\frac{y}{r_0}\right) \rightarrow 1$, para $\frac{y}{r_0} \rightarrow 0$.

Usando as eqs. (13.9a) e (13.9b), e, (13.11a), integrando apropriadamente, temos:

$$u_{\text{máx.}} - \bar{u} = u_\tau F\left(\frac{y}{r_0}\right), \quad (13.12a)$$

ou,

$$\frac{u_{\text{máx.}} - \bar{u}}{u_\tau} = 2,5 \ln \frac{r_0}{y}, \quad (13.12b)$$

válidas para fora da região de parede, tanto para tubos lisos quanto rugosos. A eq. (13.12b) é conhecida como **lei universal de distribuição de velocidades** para tubos lisos ou rugosos e fricção turbulenta preponderante e números de Re altos.

c) para a região de parede em tubo rugoso:

Resta uma lei de parede para tubo rugoso:

Para e sendo a altura do elemento de rugosidade, se $e > \delta_v$, então o tubo é rugoso.

$$\frac{e}{\delta_v} \sim \frac{e u_\tau}{\nu}, \quad (13.13)$$

sendo que $\frac{e u_\tau}{\nu}$ corresponde ao número de Re da rugosidade.

Do diagrama de Moody, notamos 3 regiões:

- a) Hidraulicamente lisa: $f = f(\text{Re})$;
- b) Regime de transição liso-rugoso: $f = f(e/r_0, \text{Re})$;
- c) Regime completamente rugoso: $f = f(e/r_0)$.

Para tubo liso, o fator de atrito f é função do número de Re. Na região de transição entre liso e rugoso, f depende de Re e da rugosidade. Já em região rugosa, f depende somente da rugosidade.

Para tubos rugosos, da **lei logarítmica para velocidades**, que corresponde à eq. (13.2a), e considerando y_0 proporcional à altura da rugosidade, $y_0 = \gamma e$, temos:

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\chi} \left(\ln \frac{y}{e} - \ln \gamma \right), \quad (13.14a)$$

ou, de Nikuradse:

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = 2,5 \ln \frac{y}{e} + 8,5, \quad (13.14b)$$

para tubo completamente rugoso.

Lei de Potência.

Definição do fator de atrito (Darcy-Weisbach):

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{f}{D} \frac{\rho}{2} \bar{u}^2, \quad (13.15a)$$

$$\tau_0 = \frac{1}{8} f \rho \bar{u}^2, \quad (13.15b)$$

$$\tau = \frac{r}{2} \frac{\Delta p}{L}. \quad (13.15c)$$

De P. Blasius (somente para tubo liso e regime turbulento, com Re entre 4000 e 100000):

$$f = 0,3164 \text{Re}^{-1/4}, \quad (13.15d)$$

relação essa conhecida como **fórmula de resistência de Blasius para tubos lisos**, válida para $\text{Re} \leq 10^5$.

Assim, observamos que: $\frac{\Delta p}{L} \sim \bar{u}^{-7/4}$.

Segundo dados de Nikuradse, para $4 \cdot 10^3 < \text{Re} < 3,2 \cdot 10^6$, temos que:

$$\frac{\bar{u}}{u_{\text{máx.}}} = \left(\frac{y}{r_0} \right)^{1/n}, \quad (13.16)$$

onde: $n = f(\text{Re})$.

Tabela 1:

Re	$4 \cdot 10^3$	$100 \cdot 10^3$	$3240 \cdot 10^3$
n	6	7	10

Da eq. (13.16), temos:

$$\frac{\bar{V}}{u_{\text{máx.}}} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}. \quad (13.17)$$

Tabela 2:

n	6	7	8	9	10
$\bar{u}/u_{\text{máx.}}$	0,791	0,817	0,837	0,852	0,865

Como verificado na tabela 2, como $\bar{u}/u_{\text{máx.}}$ vai aumentando, $u_{\text{máx.}}$ vai diminuindo. Assim, o perfil vai tornando-se mais achatado.

A relação entre as eqs. (13.16) e (13.15d) foi originalmente descoberta por Prandtl (1921).

Fazendo as devidas substituições e rearranjos entre as eqs. (13.15a) a (13.15d) e, Substituindo r_0 em lugar de D , temos:

$$\tau_0 = 0,03325 \rho \bar{u}^{7/4} \nu^{1/4} r_0^{-1/4} = \rho u_\tau^2, \quad (13.18a)$$

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = 6,99 \left(\frac{u_\tau r_0}{\nu} \right)^{1/7}. \quad (13.18b)$$

Da tabela 2, para $n = 7$, $\frac{\bar{u}}{u_{\text{máx.}}} \cong 0,8$ para $Re = 10^5$.

Assim:

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = 8,74 \left(\frac{u_\tau r_0}{\nu} \right)^{1/7}, \quad (13.18c)$$

Notamos que 8,74 é a constante C da eq. (13.4b), *i.e.*, genericamente:

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = 8,74 \underbrace{\left(\frac{y u_\tau}{\nu} \right)^{1/7}}_{y^*}. \quad (13.18d)$$

Temos assim a lei de potência em função de u^* e y^* com a constante C . A lei de distribuição de velocidade com perfil 1/7 pode ser derivada da fórmula de resistência de Blasius.

Ex.2:

Dados:

- 5) Tubo;
- 6) $D = 10$ cm;
- 7) $\bar{V} = 1,6$ m/s;
- 8) $e = 0,046$ mm (Ferro forjado).

Na subcamada viscosa:

$$u^* = y^* \Rightarrow \frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{y u_\tau}{\nu}. \quad (13.19a)$$

Como a subcamada vai até o valor 5:

$$\frac{y u_\tau}{\nu} = 5, \quad (13.19b)$$

e como, neste caso, $y = \delta_v$, temos:

$$\delta_v = \frac{5\nu}{u_\tau} . \quad (13.19c)$$

Para calcular u_τ :

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} , \quad (13.19d)$$

temos que encontrar:

$$\tau_0 = \frac{1}{8} \rho \bar{V}^2 f , \quad (13.19e)$$

e, pela lei de potência:

$$f = \frac{1}{n^2} , \quad (13.19f)$$

e, a partir de Re calculamos o valor de n , para $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (valor tabelado):

$$\text{Re} = \frac{\bar{V}D}{\nu} = \frac{1,6 \cdot 0,1}{1 \cdot 10^{-6}} = 1,6 \cdot 10^5 . \quad (13.19g)$$

Da tabela 7.1 (Slide):

$$n = 7,5 . \quad (13.19h)$$

Aplicando o resultado de n da eq. (13.19h) na eq. (13.19f) e, de forma sequenciada, os resultados obtidos aplicados nas eqs. (13.19e), (13.19d) e (13.19c), obtemos δ_v , e, ao final, comparamos o resultado com a rugosidade:

$$e = 0,046 < \delta_v = 0,066 \text{ mm} . \quad (13.19i)$$

Portanto, concluímos que o tubo é liso. A subcamada é da ordem de 0,1% do raio do tubo.

Ex.3:

Dados:

- 1) $D = 4 \text{ cm}$:
- 2) $Q = 0,004 \text{ m}^3/\text{s}$.

a) Calculando o fator de atrito f :

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{0,004}{\pi(0,02)^2} = 3,18 \text{ m/s}, \quad (13.20a)$$

$$\text{Re} = \frac{\bar{V}D}{\nu} = \frac{3,18 \cdot 0,04}{10^{-6}} = 1,27 \cdot 10^5. \quad (13.20b)$$

Da tabela temos que:

$$n = 7,5. \quad (13.20c)$$

Então:

$$f = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{7,5^2} = 0,018. \quad (13.20d)$$

b) Calculando a velocidade máxima $V_{\text{máx.}}$:

Velocidade é máxima na linha de centro.

$$V_{\text{máx.}} = \frac{\bar{V}(n+1)(2n+1)}{2n^2} = \frac{3,18(7,5+1)(2 \cdot 7,5+1)}{2(7,5)^2} = 3,84 \text{ m/s}. \quad (13.20e)$$

c) A posição radial para a qual a velocidade local u é igual à velocidade média $\bar{V} = 3,18 \text{ m/s}$, $u = \bar{V}$.

$$\frac{u}{u_{\text{máx.}}} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/7,5} \Rightarrow y = r_0 \left(\frac{u}{u_{\text{máx.}}}\right)^{7,5} = 2 \left(\frac{3,18}{3,84}\right)^{7,5} = 0,49 \text{ cm}. \quad (13.20f)$$

A posição radial é:

$$r = r_0 - y = 2 - 0,49 = 1,51 \text{ cm}. \quad (13.20g)$$

d) O cisalhamento na parede:

$$\tau_0 = \frac{1}{8} \rho \bar{V}^2 f = \frac{1}{8} (1000) (3,18)^2 (0,018) = 23 \text{ Pa}. \quad (13.20h)$$

e) Para escoamento em regime permanente e completamente desenvolvido:

$$\tau = \frac{r \Delta p}{2L} \Rightarrow \Delta p = \frac{2\tau_0 L}{r_0} = \frac{2 \cdot 23 \cdot 10}{0,02} = 23 \text{ kPa}. \quad (13.20i)$$