SEM0403 Fundamentos de Mecânica dos Fluidos

Forma Integral das Equações Básicas – Conservação da Massa

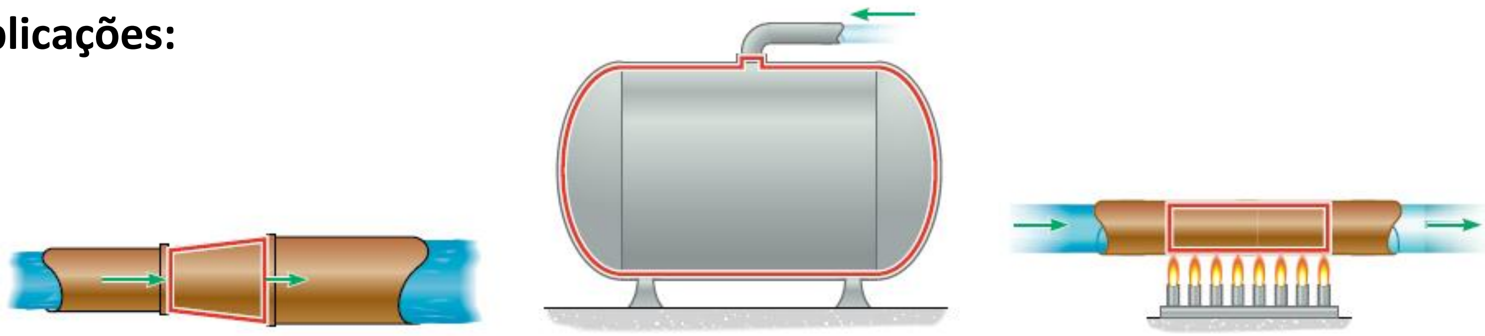
Oscar Rodriguez

Universidade de São Paulo

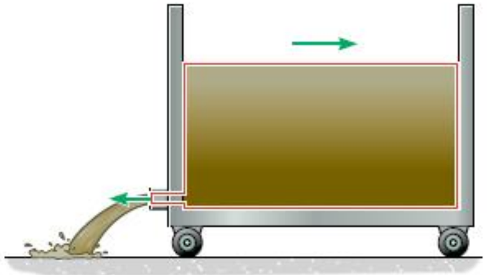
Análise Integral das Leis de Conservação

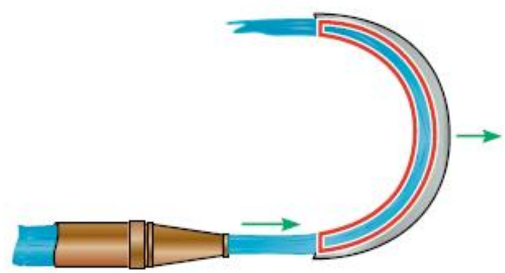
- ✓ Fluidos são capazes de distorção e de deformação contínua, assim é difícil de identificar e acompanhar certa massa de fluido.
- ✓ Na prática, muitas vezes estamos interessados no efeito resultante da interação do movimento do fluido com alguma estrutura, máquina de fluxo ou motor de combustão interna, e não no movimento da massa fluida em si.

Aplicações:



(a) (b) (c)

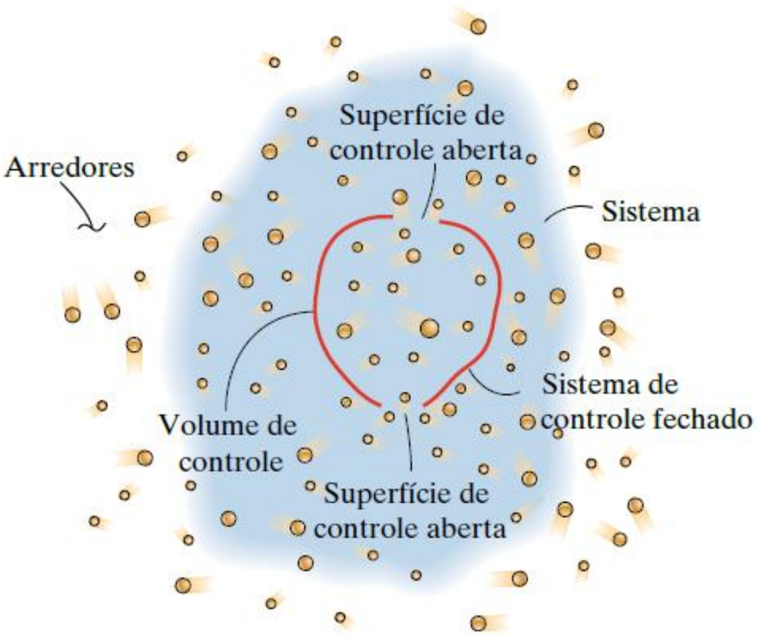


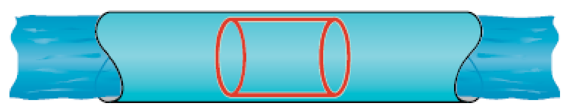


Volumes de controle finitos

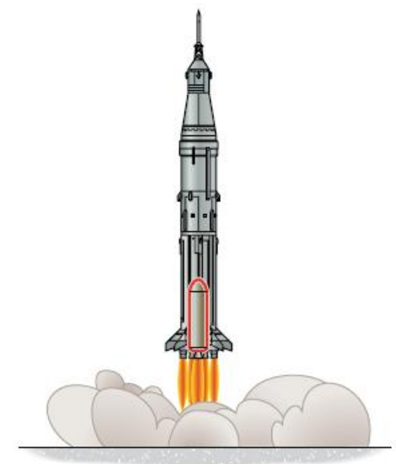
Definimos volume de controle como um volume de espaço selecionado dentro de um sistema de partículas, através do qual escoam algumas das partículas do fluido.

- ✓ Lembre-se de que a fronteira desse volume é a *superfície de controle*
- ✓ Uma parte da superfície desse volume pode estar *aberta*

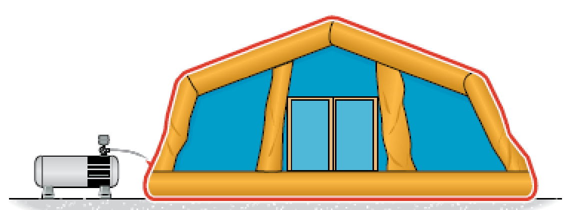




Volume de controle fixo



Volume de controle móvel



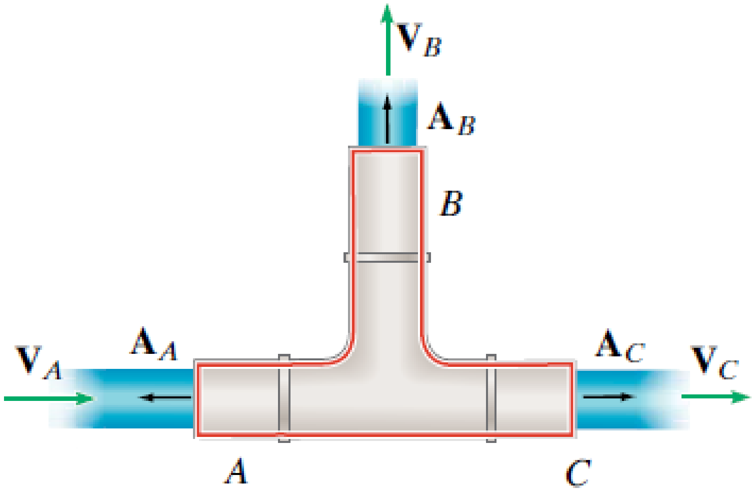
Volume de controle deformável

Velocidade

Definição: a normal *para fora* para cada área da superfície de controle é positiva.

✓Então, o escoamento que *entra* em uma superfície de controle será *negativo*,

✓E o escoamento que *sai* de uma superfície de controle será *positivo*.



O teorema de transporte de Reynolds

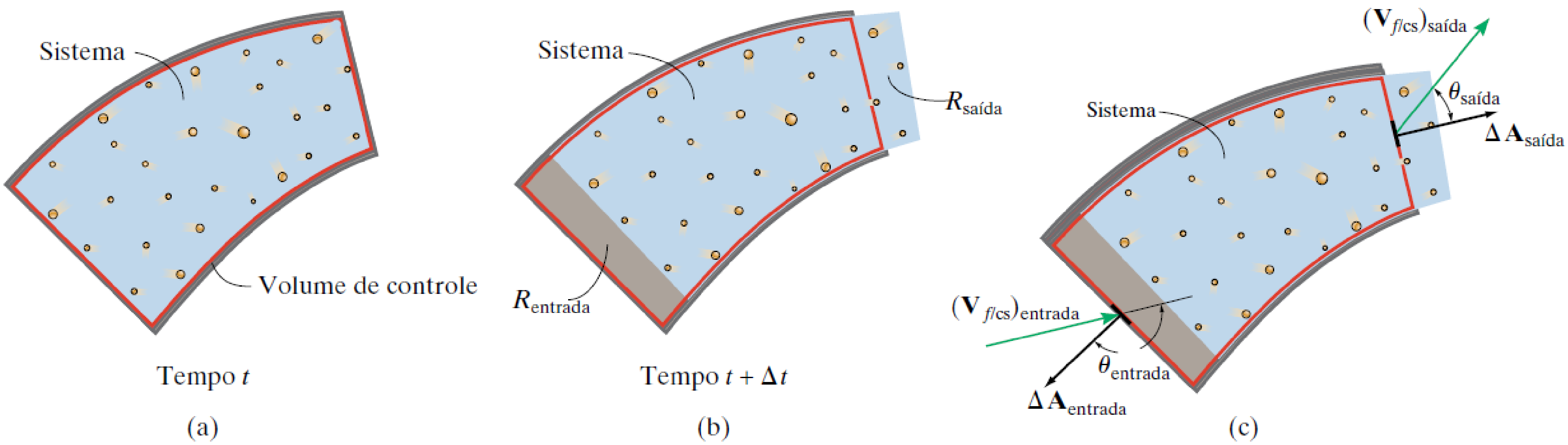
- ✓ Comportamento de um fluido é baseado na *conservação de massa*, na *conservação da energia* e na *conservação da quantidade de movimento*.
- ✓ Essas leis foram formuladas originalmente para uma *partícula*, e foram descritas usando uma abordagem *lagrangeana*
- ✓ Na mecânica dos fluidos, precisamos ter um meio de converter essas leis de sua descrição lagrangeana para uma descrição *euleriana*

Descrição de propriedade do fluido

- ✓ Qualquer propriedade do fluido que dependa *da quantidade de volume* ou *massa* em um sistema é chamada **de propriedade extensiva**, N
- ✓ As propriedades do fluido que são independentes da massa do sistema são chamadas **propriedades intensivas**, η (eta) (pressão, temperatura, etc.)

$$N = \int_m \eta \, dm = \int_{\forall} \eta \rho \, d\forall$$

Dedução do teorema do transporte de Reynolds



- ✓ Vamos considerar que o volume de controle (VC) é fixo dentro de um conduto, conforme indicado pelo limite do contorno em vermelho na figura.
- ✓ No instante t, consideramos que o *sistema* inteiro de partículas de fluido está dentro do volume de controle (VC) e coincide com ele.
- ✓ No instante $t + \Delta t$, uma parte desse sistema de partículas sai pela *superfície de controle aberta* e agora está na região $R_{\text{saída}}$, *fora* do volume de controle.

Teorema do Transporte de Reynolds:

$$\left(\frac{DN}{Dt}\right)_{\text{syst}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \eta\rho\, d\forall + \int_{\text{cs}} \eta\rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{A}$$

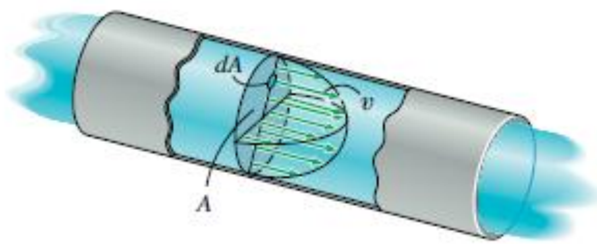
Variação local

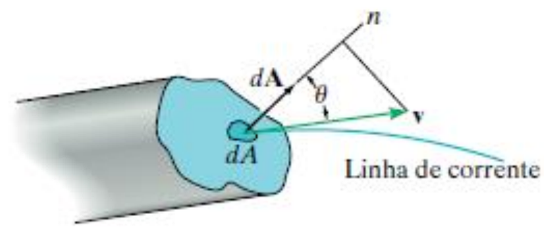
Variação convectiva

- ✓ Ele relaciona a taxa de variação no tempo de qualquer propriedade extensiva *N* de um sistema de partículas de fluido, definida a partir de uma descrição lagrangeana, às variações da mesma propriedade do ponto de vista do volume de controle, ou seja, conforme definida a partir de uma descrição euleriana
- ✓ Os dois termos no lado direito da Equação formam a derivada material de *N*, e é por isso que simbolizamos o lado esquerdo da equação com esse operador

Vazão volumétrica

✓ A taxa na qual um *volume* de fluido escoa por uma seção transversal *A* é chamada de ***vazão volumétrica***, ou simplesmente ***vazão*** ou ***descarga***





✓ Como o volume é $d\forall = (v\,dt)(dA)$, então a *vazão volumétrica dQ* que passa pela área é determinada dividindo-se o volume por *dt*, que resulta em $dQ = d\forall/dt = v\,dA$. Se integrarmos:

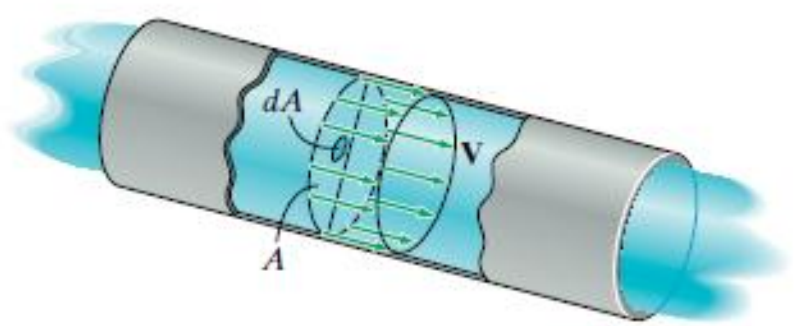
$$Q = \int_A v\,dA \qquad [\mathrm{m^3/s\ ou\ pé^3/s}]$$

✓ Ao calcular *Q*, é importante lembrar que a velocidade precisa ser *normal* à área transversal através da qual o fluido escoa. Se isso não acontecer:

$$\boxed{Q = \int_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}}$$

Velocidade Média

- ✓ Se *V* é a *velocidade média* e *A* é a área da seção transversal



Fluidos invíscidos ou ideais produzem uma distribuição de velocidade média.

$$V = \frac{\int_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}}{A}$$

ou

$$\boxed{V = \frac{Q}{A}}$$

Vazão mássica

✓ Como a massa do elemento na Figura é $dm = \rho d\mathcal{V} = \rho(v\,dt)dA$, a ***vazão mássica*** ou ***descarga de massa*** do fluido pela seção transversal inteira torna-se

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \int_A \rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$$

[kg/s ou slug/s]

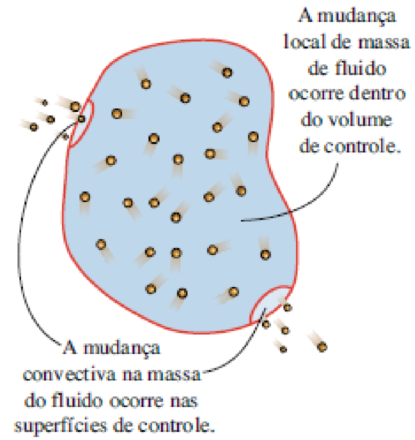
✓ Se um fluido é incompressível, então ρ é constante e, para o caso especial de um perfil de velocidade uniforme:

$$\boxed{\dot{m} = \rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}}$$

O escoamento de massa do ar através desse duto deverá ser determinado por meio da área aberta do duto e do componente de velocidade que é perpendicular a essa área.

Conservação da Massa

- ✓ dentro de uma região, fora qualquer processo nuclear, a matéria não pode ser criada nem destruída, i.e., $(dm/dt)_{sist} = 0$.
- ✓ Aqui, a propriedade extensiva $N = m$, portanto, a propriedade intensiva correspondente é massa por massa unitária, ou $\eta = m/m = 1$. Do teorema do transporte de Reynolds:



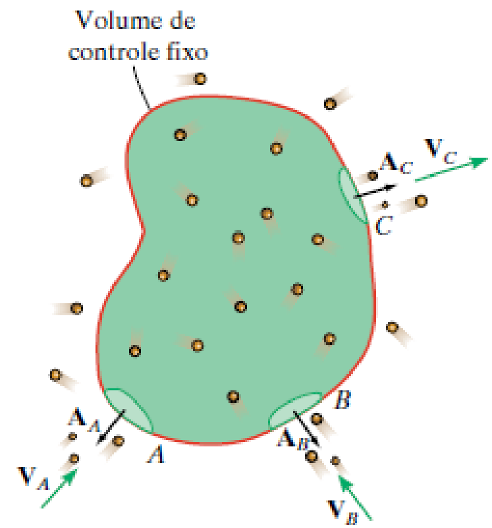
$$\cancelto{0}{\left(\frac{DN}{Dt}\right)_{\text{syst}}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \cancelto{1}{\eta}\rho\, d\forall + \int_{\text{cs}} \cancelto{1}{\eta}\rho \mathbf{V}\cdot d\mathbf{A}$$

Assim:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{vc}} \rho\, d\forall + \int_{\text{sc}} \rho\, \mathbf{V}\cdot d\mathbf{A} = 0$$

Mudança de massa local

Vazão mássica resultante convectiva



$$\Sigma \mathbf{V}\cdot\mathbf{A} = 0$$

$$-V_A A_A - V_B A_B + V_C A_C = 0$$

Escoamento em regime permanente de um fluido incompressível

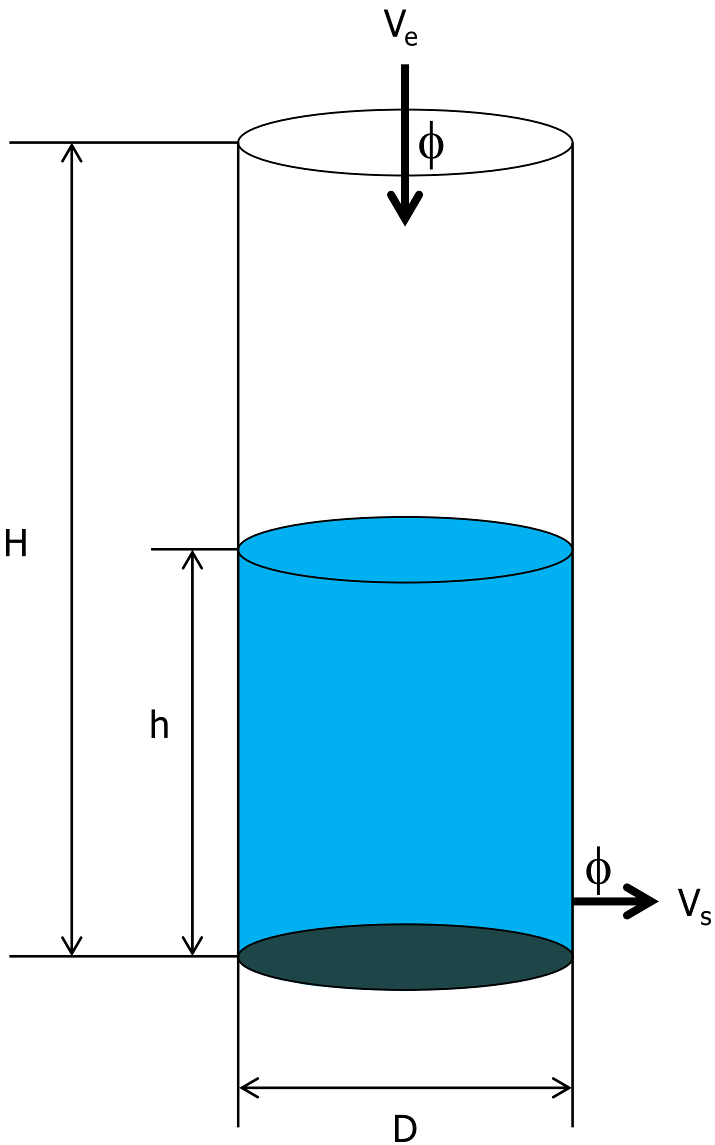
Equação de balanço de massa: forma discreta

$$\left(\begin{array}{c} \text{taxa de variação} \\ \text{da massa do V.C.} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{fluxo total de} \\ \text{massa} \end{array} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} M + \left(\sum_{saídas} \dot{m}_{sai,k} - \sum_{entradas} \dot{m}_{ent,k} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} M + \left(\sum_{saídas} \rho_k V_{n,k} A_k - \sum_{entradas} \rho_k V_{n,k} A_k \right) = 0$$

Exemplo: enchimento de uma caixa d'água



$$\frac{d}{dt}M + \left(\sum_{saídas} \rho_k V_{n,k} A_k - \sum_{entradas} \rho_k V_{n,k} A_k \right) = 0$$

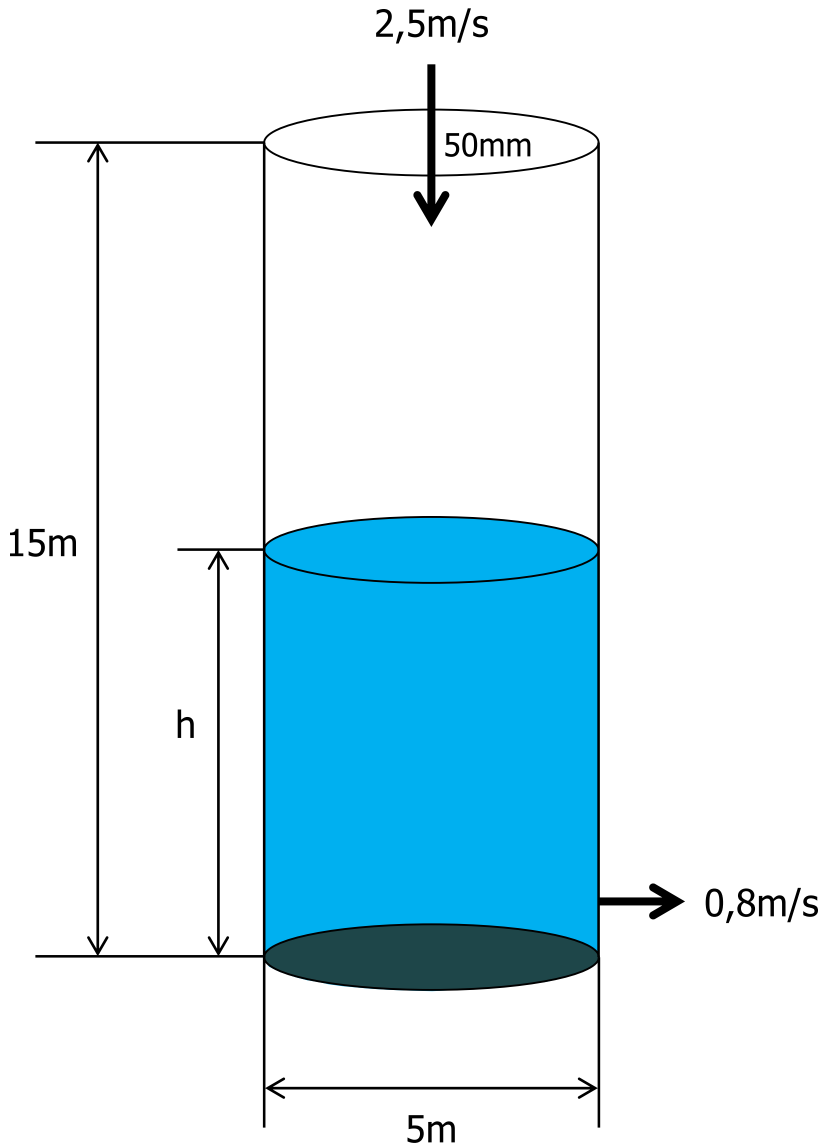
$$\frac{d}{dt}M = \frac{d}{dt}\left(\rho \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot h \right) = \left(\rho \cdot \frac{\pi D^2}{4} \right) \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\sum_{saídas} \rho_k V_{n,k} A_k = \rho V_s \frac{\pi \phi^2}{4}$$

$$\sum_{entradas} \rho_k V_{n,k} A_k = \rho V_e \frac{\pi \phi^2}{4}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\phi^2}{D^2}(V_e - V_s)$$

Exemplo: enchimento de uma caixa d'água



$$\frac{dh}{dt} = \frac{\phi^2}{D^2}(V_e - V_s)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0{,}05^2}{5^2}(2{,}5 - 0{,}8)$$

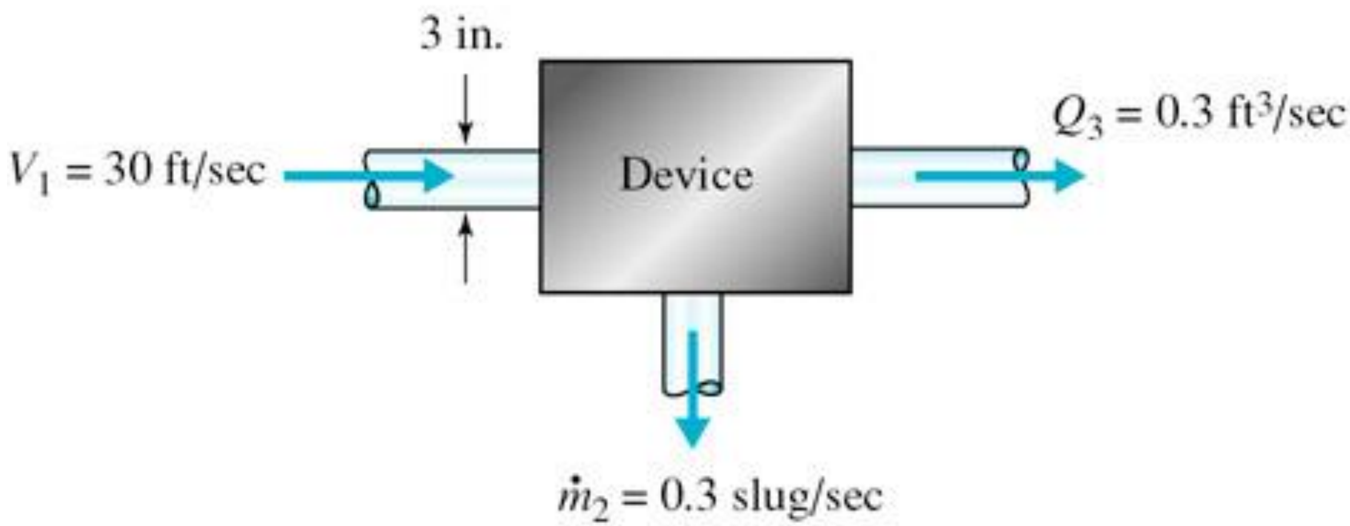
$$\frac{dh}{dt} = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\,\frac{m}{s}$$

$$\frac{dh}{dt} = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\,\frac{m}{s}\,\frac{3600\ s}{1h}$$

$$\frac{dh}{dt} = 0{,}612 m/h \Rightarrow 24{,}5h$$

Exercício 1

Água flui para dentro e fora de um aparelho, como mostrado na figura. Calcule a taxa de variação da massa de água (*dm/dt*) no aparelho.

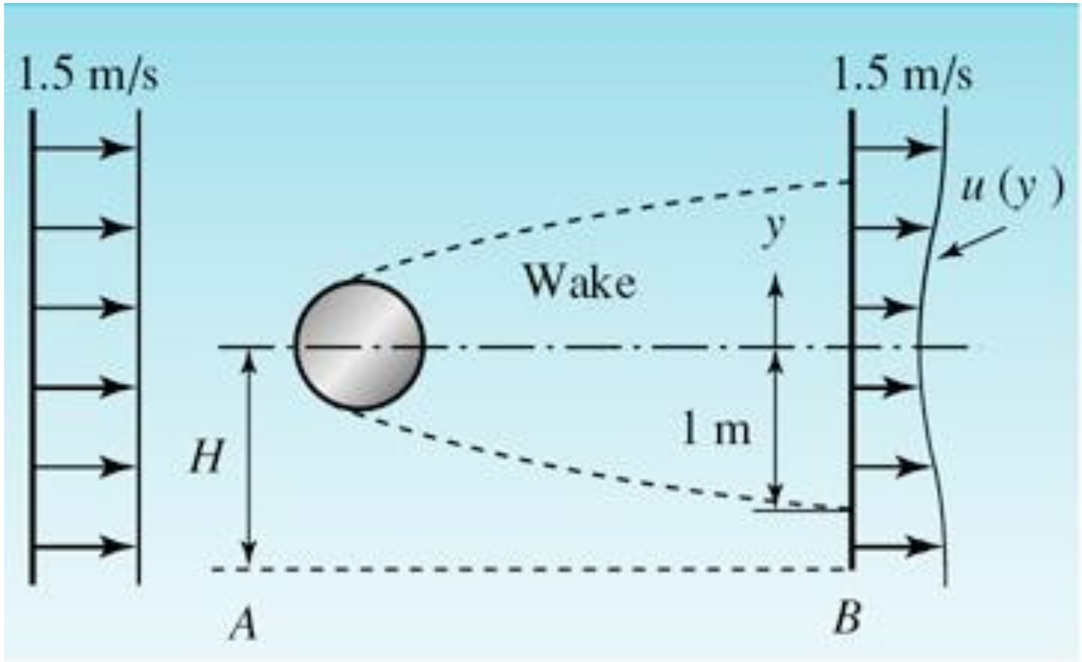


Exercício 2

Um escoamento uniforme aproxima-se de um cilindro, como mostra a Fig. A distribuição simétrica da velocidade na localização mostrada, corrente a jusante na esteira do cilindro, é aproximada por:

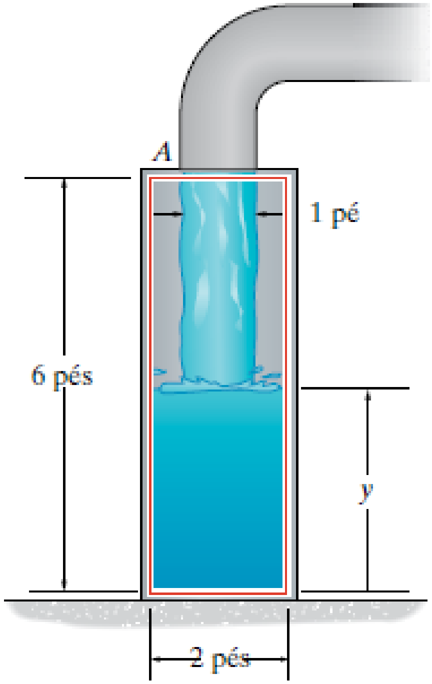
$$u(y) = 1{,}25 + \frac{y^2}{4} \quad , \quad -1 < y < 1$$

em que *u(y)* é dada em m/s e *y* em metros. Determine a vazão mássica através da superfície AB por metro de profundidade. Use ρ = 1.23 kg/m^3.



Exercício 3

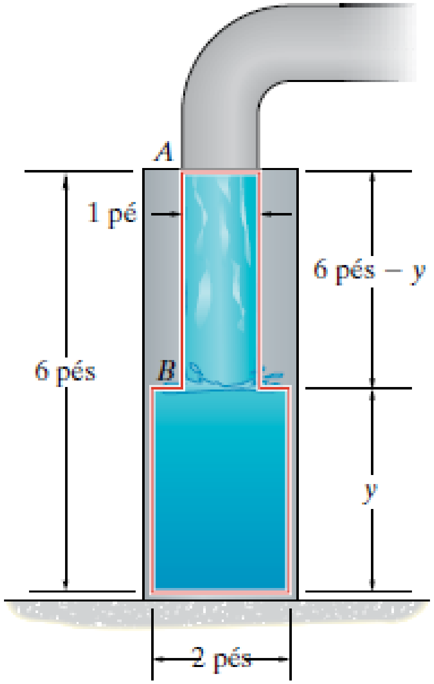
O tanque com 2 pés de diâmetro da figura está sendo enchido de água usando um tubo com 1 pé de diâmetro, que possui uma descarga de 4 pés^3/s. Determine a taxa em que o nível de água está subindo no tanque.



(a)

VC fixo, tanque inteiro

Regime transitório



(b)

VC fixo, apenas a água

Regime permanente