



Algumas Soluções Exatas das Equações de Navier-Stokes para escoamentos Incompressíveis e Viscosos

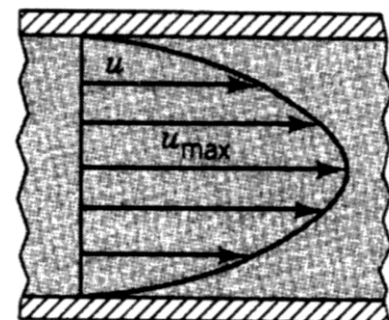
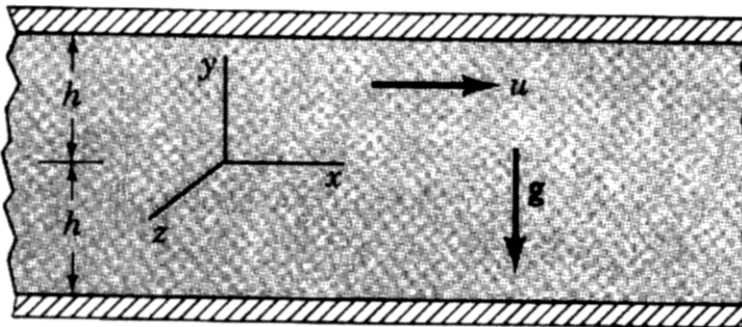
1. Escoamento Laminar e em Regime Permanente entre Duas Placas Paralelas

Eqs. de N-S:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

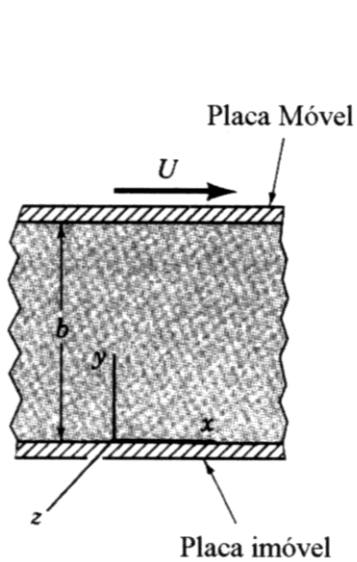
$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$



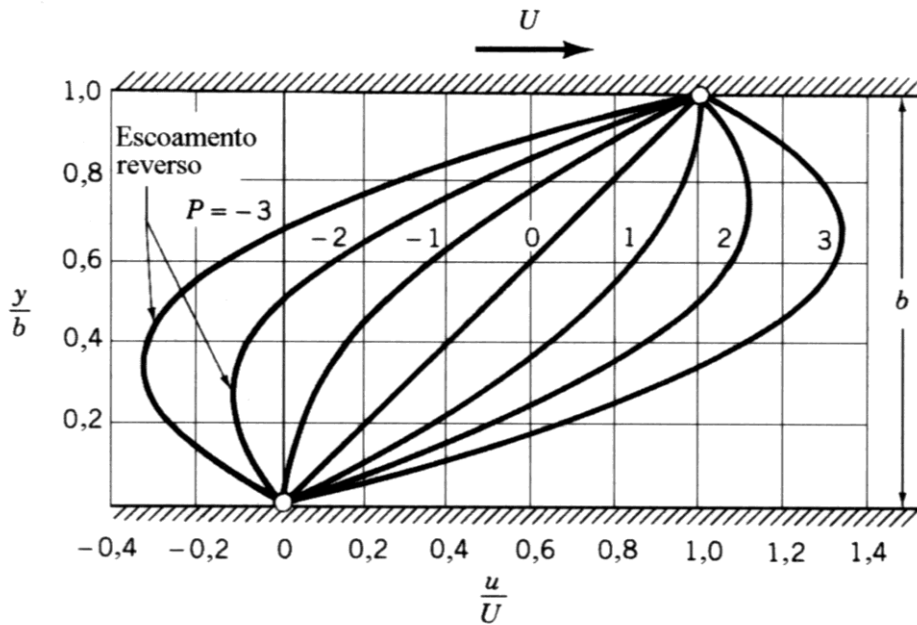
(quadro negro)



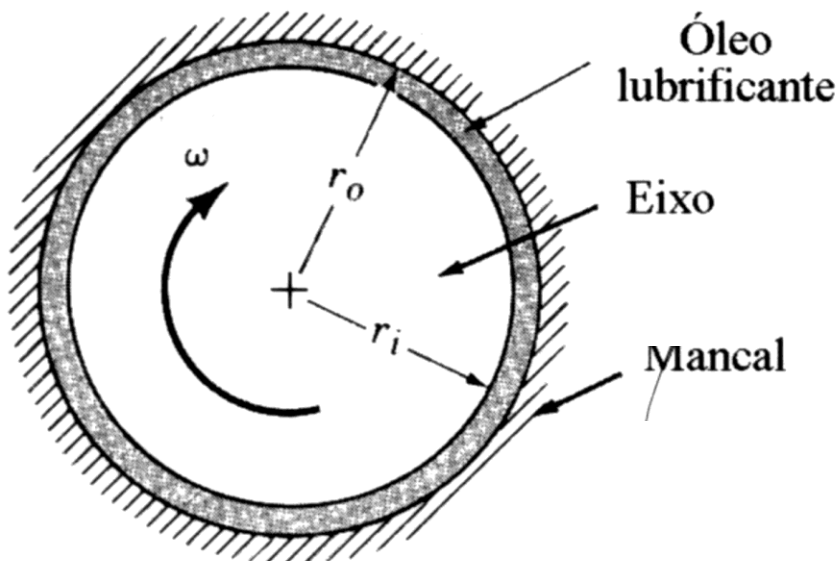
2. Escoamento de Couette



(a)



(b)





3. Escoamento Laminar e em Regime Permanente em Tubos (escoamento Hagen-Poiseuille)

Eqs. N-S em coordenadas cilíndricas:

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right]$$

(direção θ)

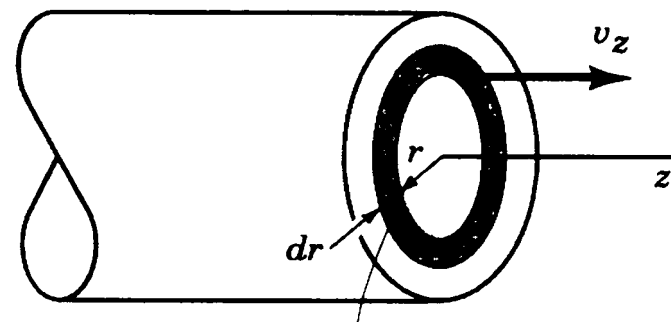
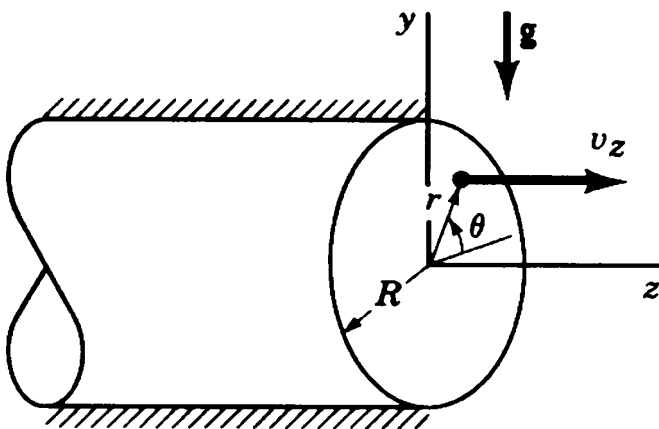
$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) =$$

$$= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right]$$

(direção z)

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]$$





Alguns aspectos da análise diferencial

As equações básicas que descrevem o movimento dos fluidos são as equações de Navier-Stokes e a equação da continuidade, respectivamente:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

e

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

As quais são válidas para escoamentos incompressíveis de fluidos Newtonianos

Os casos simples apresentados não devem deixar a falsa impressão de que os procedimentos utilizados para obter as soluções das equações de Navier-Stokes são fáceis. Existem muito poucas soluções analíticas para escoamentos com aplicação prática. Por exemplo, não existe uma solução analítica para o escoamento em torno de um corpo como uma esfera, cubo ou avião.

As equações gerais aqui apresentadas são normalmente utilizadas nas análises avançadas dos escoamentos. Atualmente, se tornou viável a simulação numérica dos escoamentos (mecânica dos fluidos computacional - “CFD”) e as técnicas disponíveis, entre outras, são: (1) métodos das diferenças finitas, (2) método dos elementos e dos volumes finitos e (3) método dos elementos de contorno.