

FUNDAMENTOS DE TURBULÊNCIA

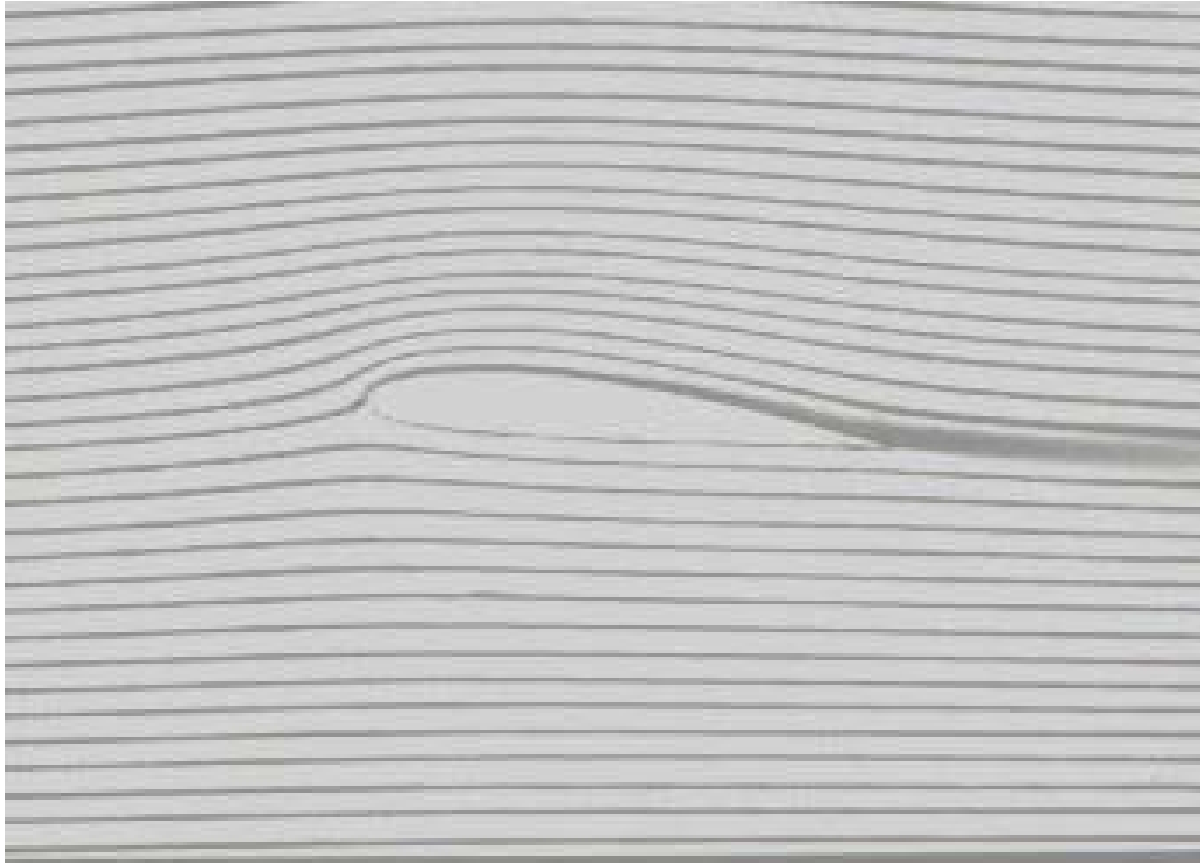
Agradecimentos ao **Professor Aristeu da Silveira Neto**
Universidade Federal de Uberlândia

Escoamento Laminar

No regime de escoamento laminar o fluido se move de forma suave e organizada em camadas ou lâminas, não havendo mistura macroscópica de camadas adjacentes de fluido.

Exemplo de Escoamento Laminar

Escoamento sobre aerofólio



Exemplo de Escoamento Laminar

Onda Interna Formada sobre os Himalaias

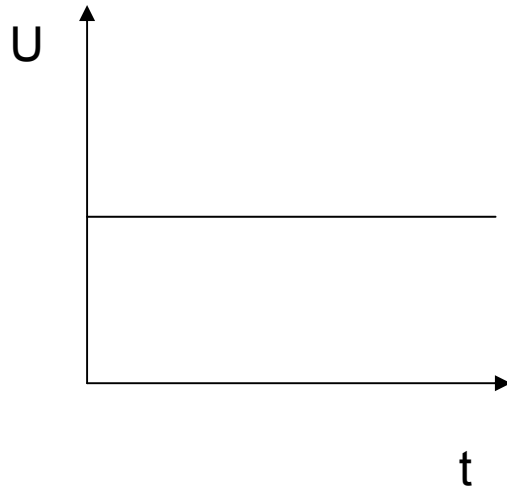


Regime Laminar

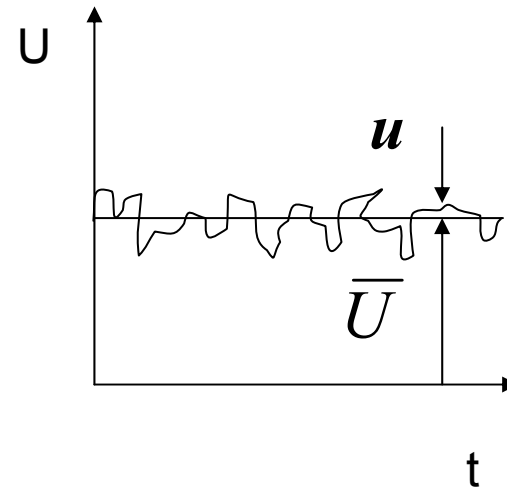
x

Regime Turbulento

Medindo a componente x da velocidade num ponto fixo de um tubo, tanto para escoamento laminar quanto turbulento, os registros gráficos da velocidade x tempo aparecerão de acordo com as figuras abaixo:



Escoamento laminar



Escoamento turbulento: $U = \bar{U} + u$

Comparação entre Regime Laminar e Regime Turbulento

Laminar Wake



Turbulent Wake

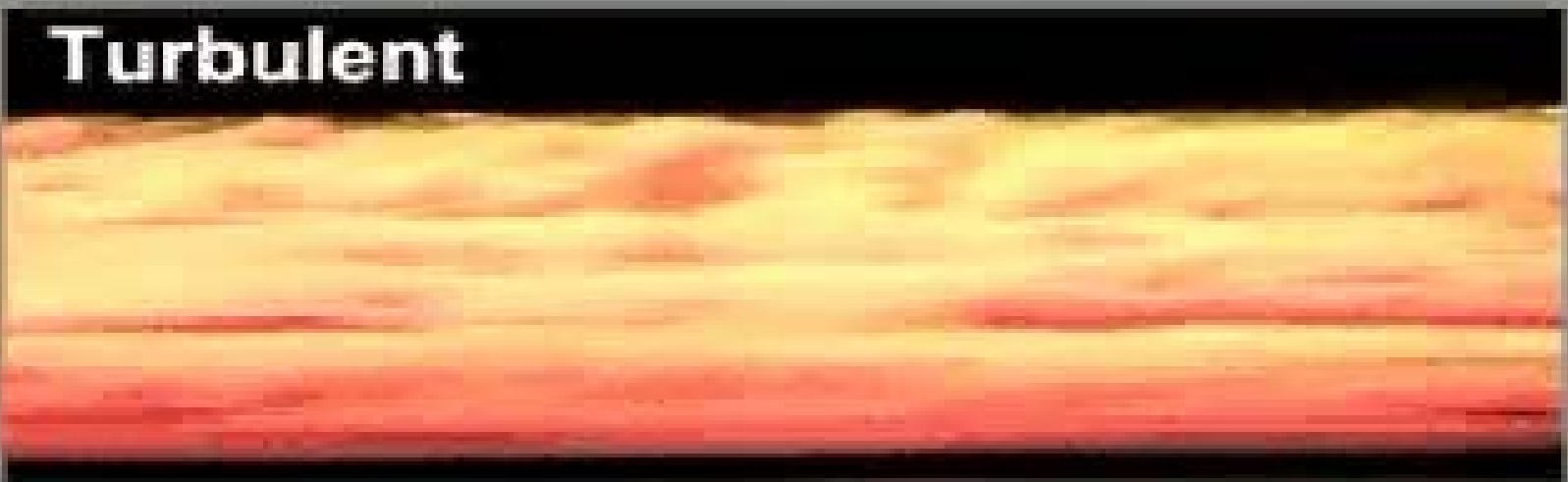


Comparação entre Regime Laminar e Regime Turbulento

Laminar



Turbulent

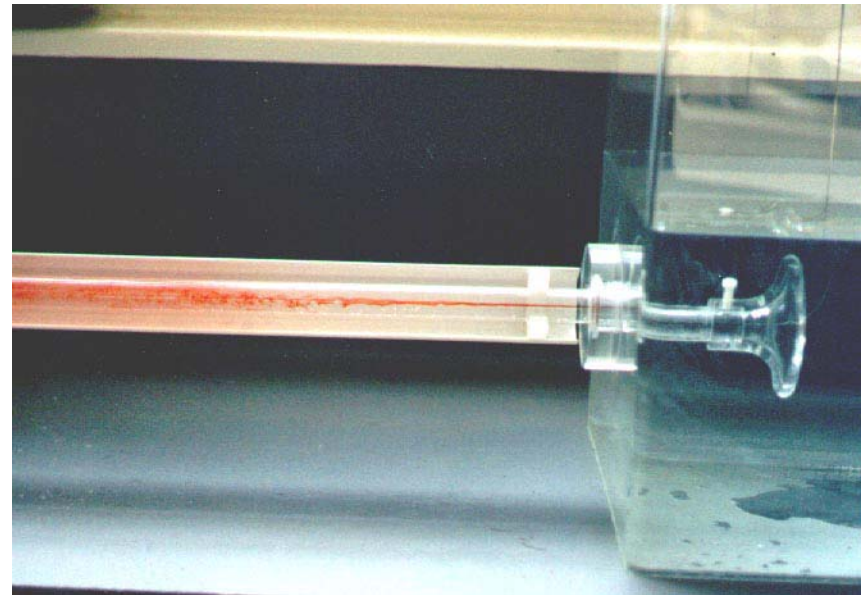
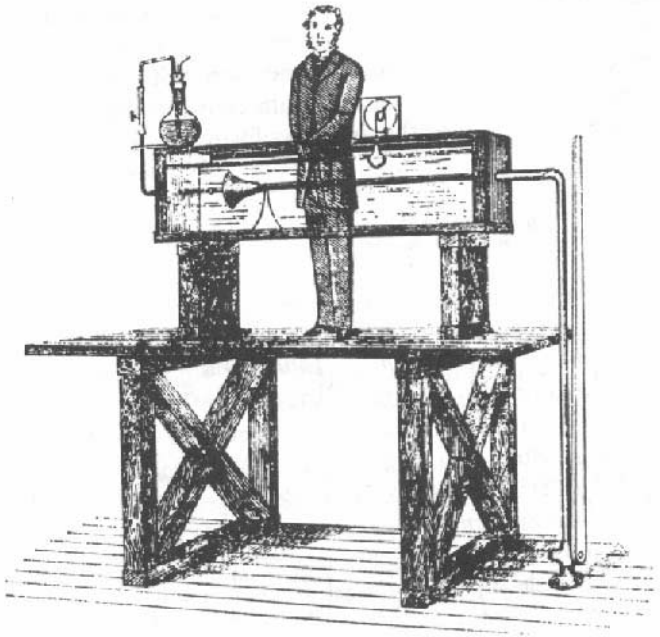


Transição à Turbulência

O processo de transição à turbulência foi identificado por Osborn Reynolds em 1883, e acontece pela introdução de perturbações num escoamento inicialmente estável (laminar).

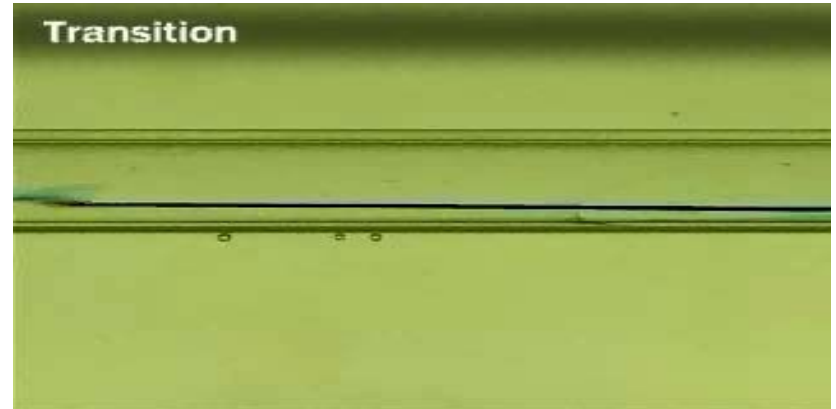
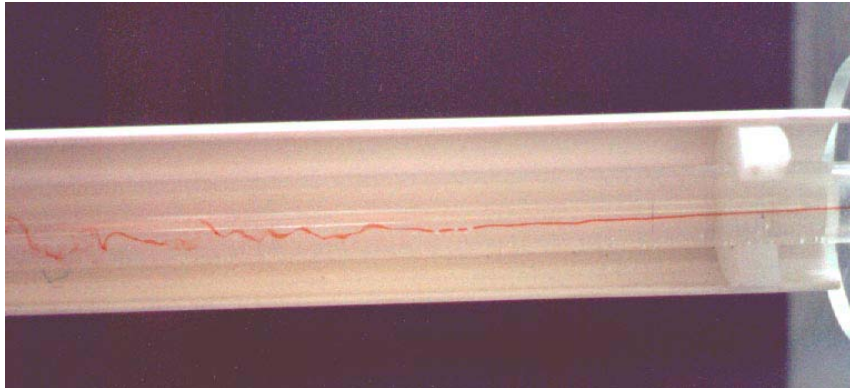
Essas perturbações são amplificadas, multiplicadas e se transformam em turbulência.

O Experimento de Reynolds



Transição à Turbulência

A transição à turbulência se dá através da amplificação de perturbações introduzidas no escoamento, inicialmente laminar, por variadas fontes de ruído.



Escalas da Turbulência

As chamadas escalas da turbulência são a ordem de grandeza das variáveis envolvidas no fenômeno da turbulência:

1. Comprimento
2. Tempo
3. Velocidade
4. Vorticidade
5. Energia

Escalas Dissipativas de Komolgorov

As escalas dissipativas de Komolgorov são as menores escalas que podem ocorrer em um escoamento turbulento.

1. Comprimento $\rightarrow l_d = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}$

2. Tempo $\rightarrow \tau = (\nu / \varepsilon)^{1/2}$

3. Velocidade $\rightarrow u = (\nu * \varepsilon)^{1/4}$

4. Vorticidade $\rightarrow w = (\varepsilon / \nu)^{1/2}$

5. Energia $\rightarrow e = (\nu * \varepsilon)^{1/2}$

Onde: $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon : \text{dissipação viscosa} \\ \nu : \text{viscosidade cinemática do fluido} \end{array} \right.$

Grandes Escalas

As chamadas grandes escalas da turbulência são as maiores estruturas que ocorrem no escoamento, e são determinadas pela geometria que lhes dá origem.

Comparação entre as Grandes Escalas e as Escalas Dissipativas de Komolgorov

$$\textit{Comprimento} : \frac{L}{l_d} = \text{Re}_L^{3/4}$$

$$\textit{Tempo} : \frac{T}{\tau} = \text{Re}_L^{1/2}$$

$$\textit{Velocidade} : \frac{U}{u} = \text{Re}_L^{1/4}$$

$$\textit{Vorticidade} : \frac{w}{W} = \text{Re}_L^{1/2}$$

$$\textit{Energia} : \frac{E}{e} = \text{Re}_L^{1/2}$$

Caracterização da Turbulência

- **A turbulência é uma característica do escoamento, não do fluido.**
- **A turbulência é um fenômeno altamente difusivo.**
- **A turbulência é rotacional e tridimensional.**
- **A turbulência é um fenômeno altamente dissipativo.**
- **A turbulência é um fenômeno contínuo.**
- **A turbulência é um fenômeno, atualmente, imprevisível.**
- **A turbulência acontece a altos números de Reynolds e tem um largo espectro de energia**

Origem da Turbulência

Para qualquer tipo de escoamento a transição à turbulência pode ser generalizada como sendo o resultado da amplificação de perturbações injetadas nos escoamentos por fontes diversas.

A forma física da geração de instabilidades a partir de uma perturbação vai depender do tipo de escoamento. Os escoamentos transicionais podem ser classificados em:

1. Escoamentos cisalhantes livres.
2. Escoamentos parietais.
3. Escoamentos devidos à convecção térmica.
4. Escoamentos sob rotação.

Combinações deste 4 tipos de escoamentos básicos formam os escoamentos complexos.

Escoamentos Cisalhantes Livres

Os escoamentos cisalhantes livres são caracterizados pela ausência de paredes que os confine e pela ausência de obstáculos em seu interior.

Podem ser sub-divididos em:

1. Camadas de Mistura

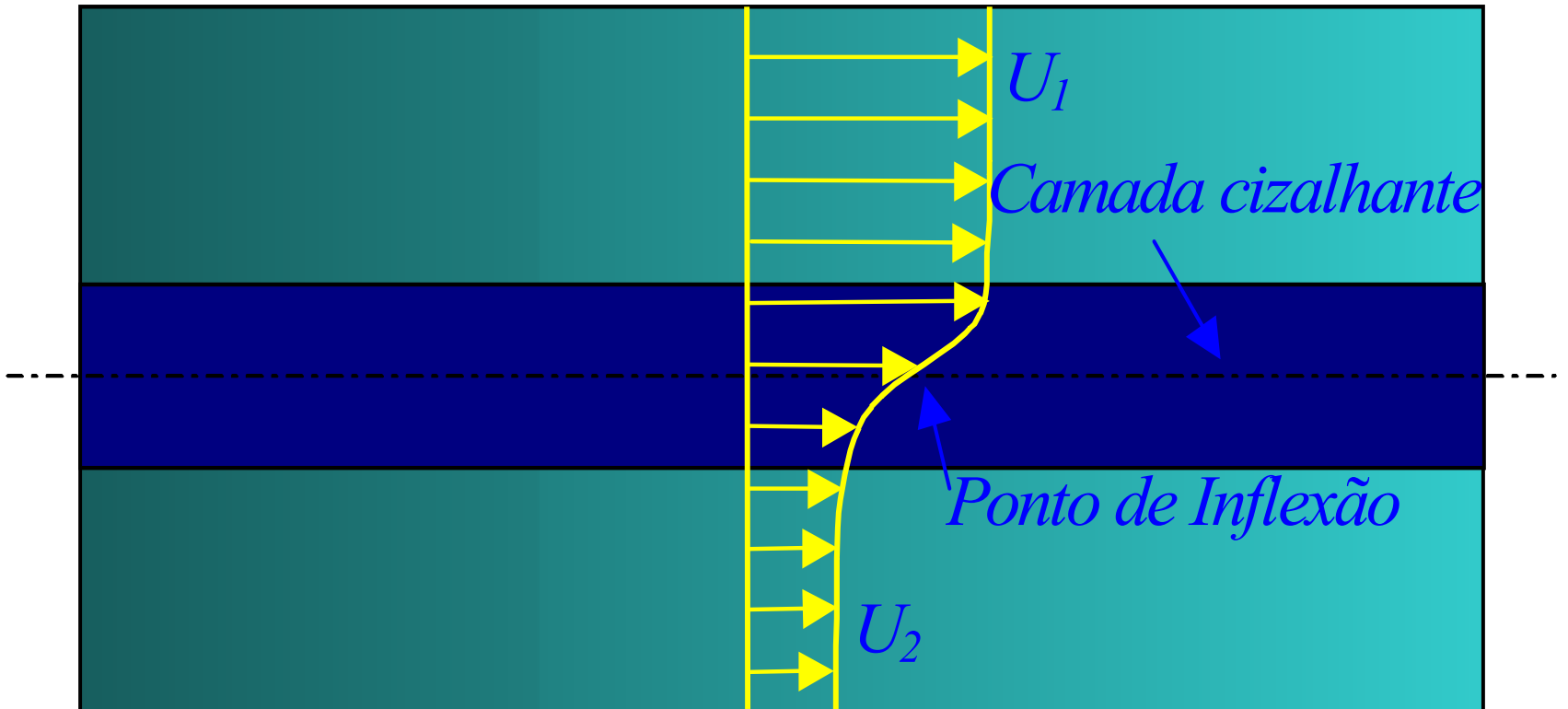
2. Jatos

3. Esteiras

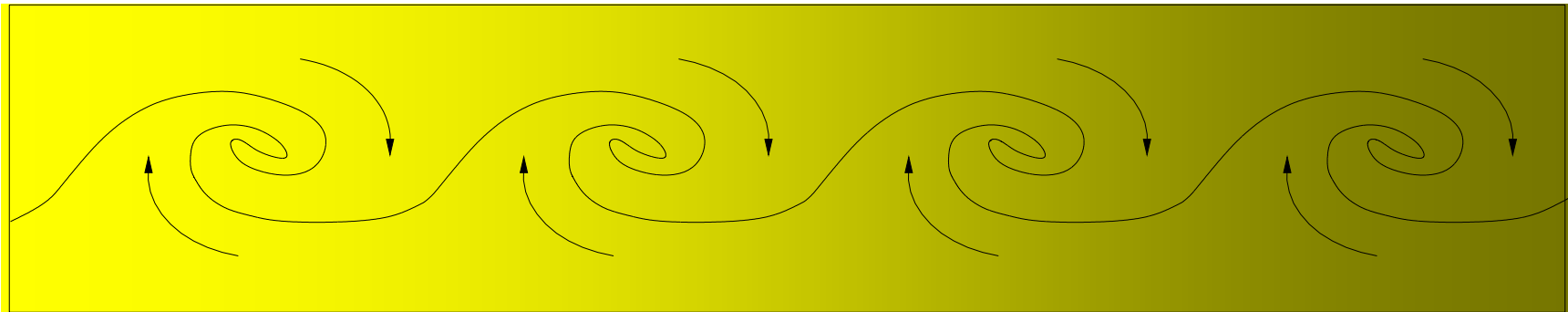
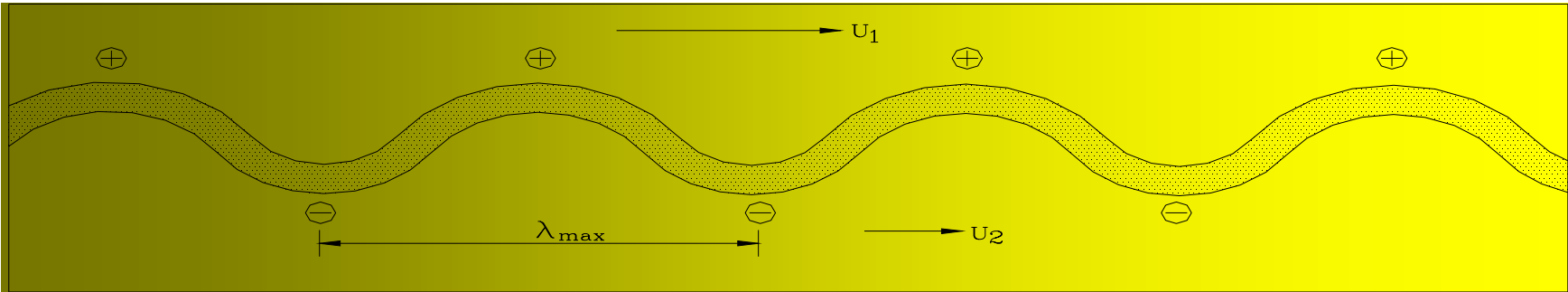
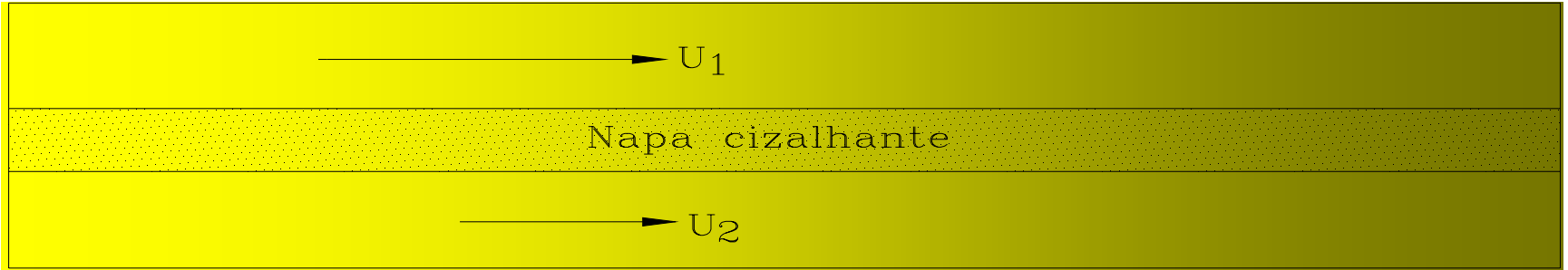
Os escoamentos cisalhantes livres transicionam a baixos números de Reynolds. Para jatos, por exemplo, a transição se inicia para $Re=10$.

Camadas de Mistura

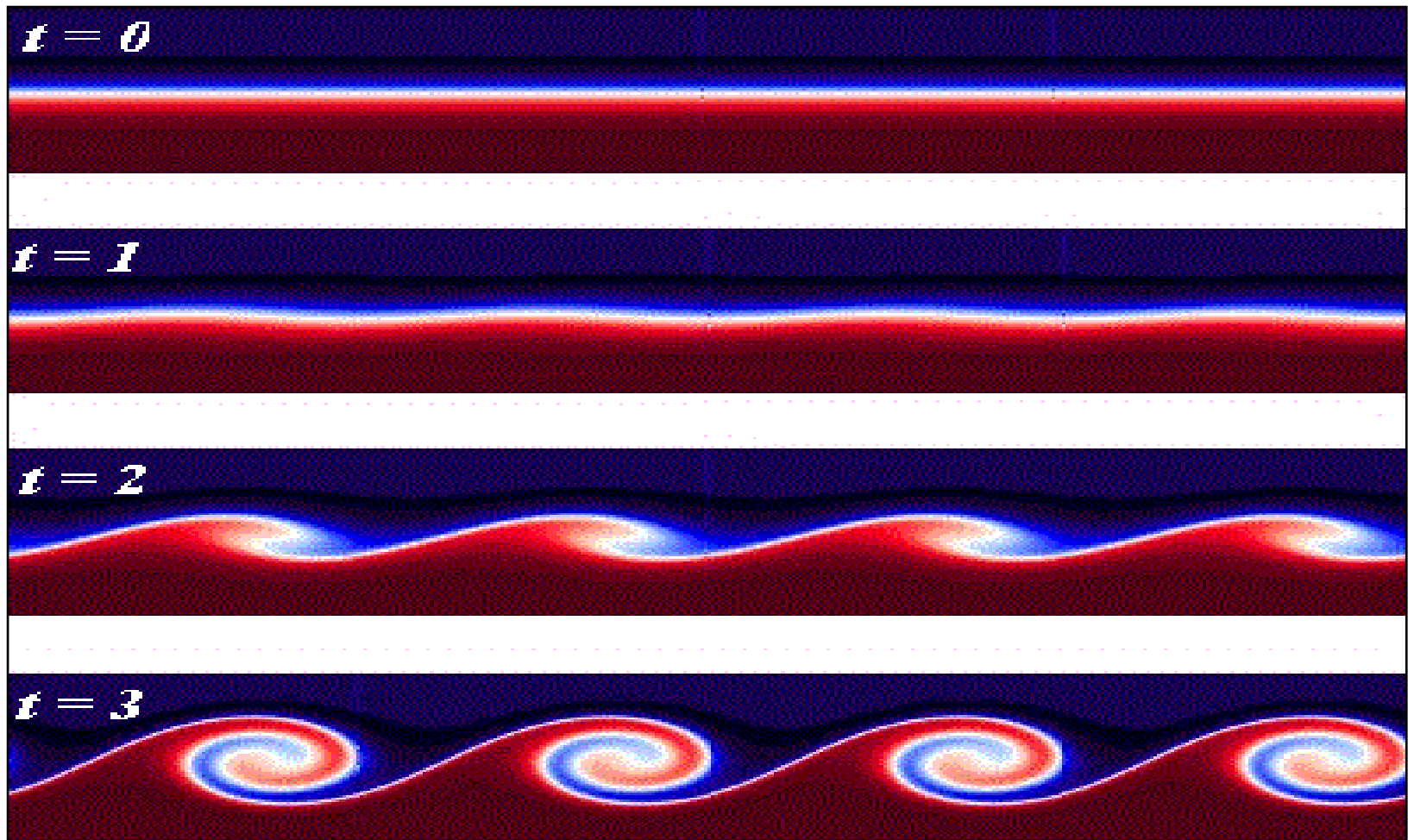
Este tipo de escoamento transicional se caracteriza pela existência de diferentes velocidades no interior do escoamento. Regiões com diferentes perfis de velocidade uniforme são separadas por camadas cisalhantes.



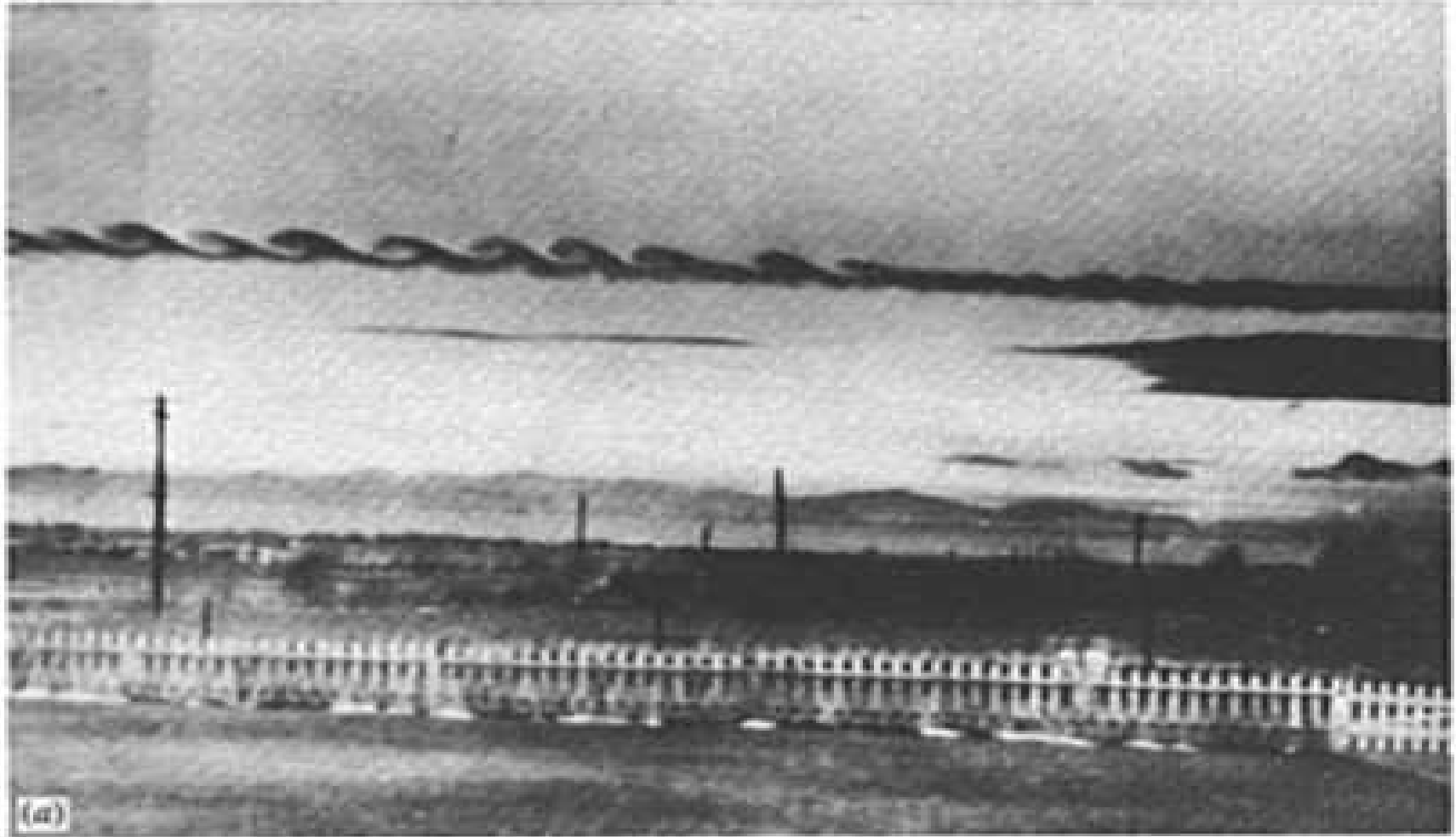
Camada de Mistura em Desenvolvimento Temporal



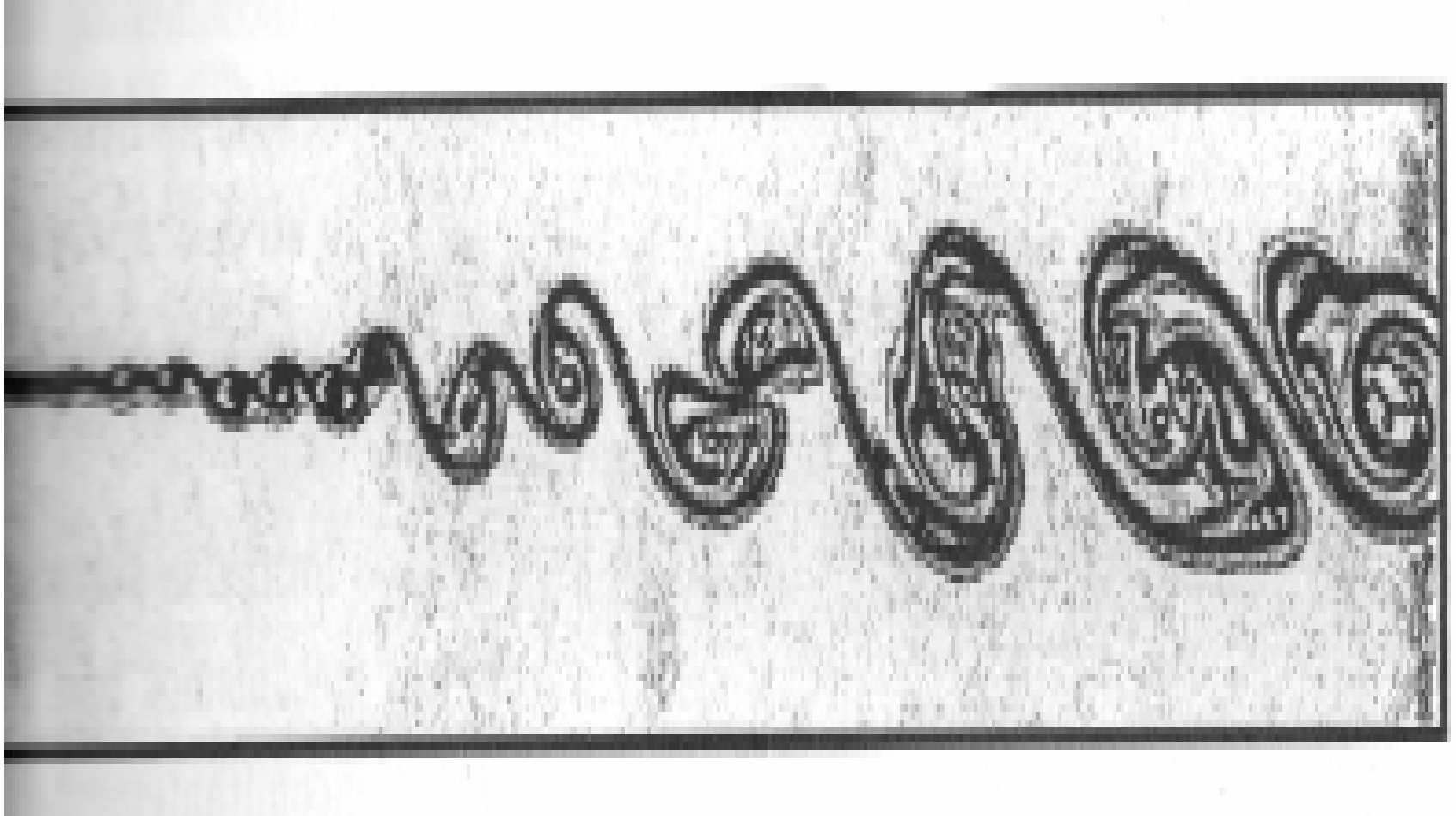
Camada de Mistura em Desenvolvimento Temporal



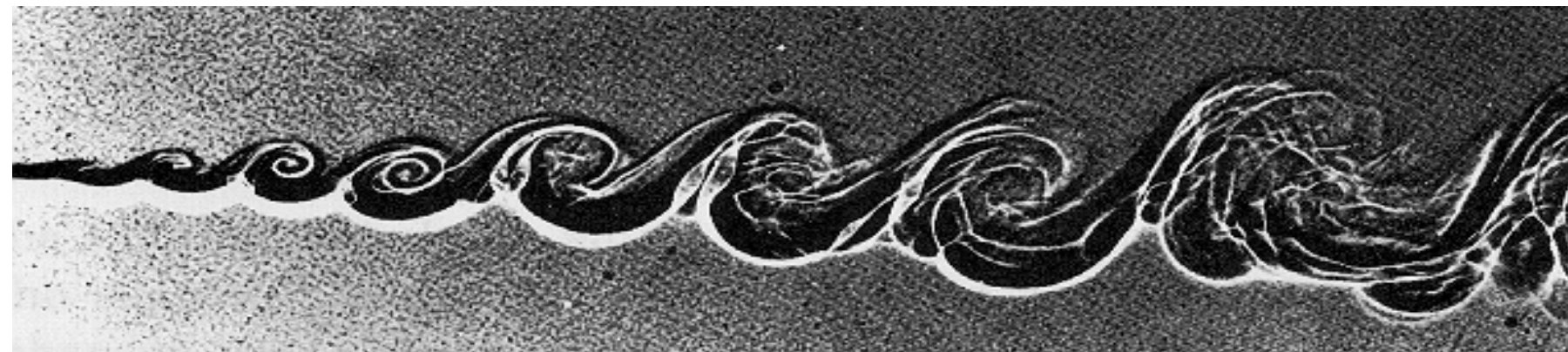
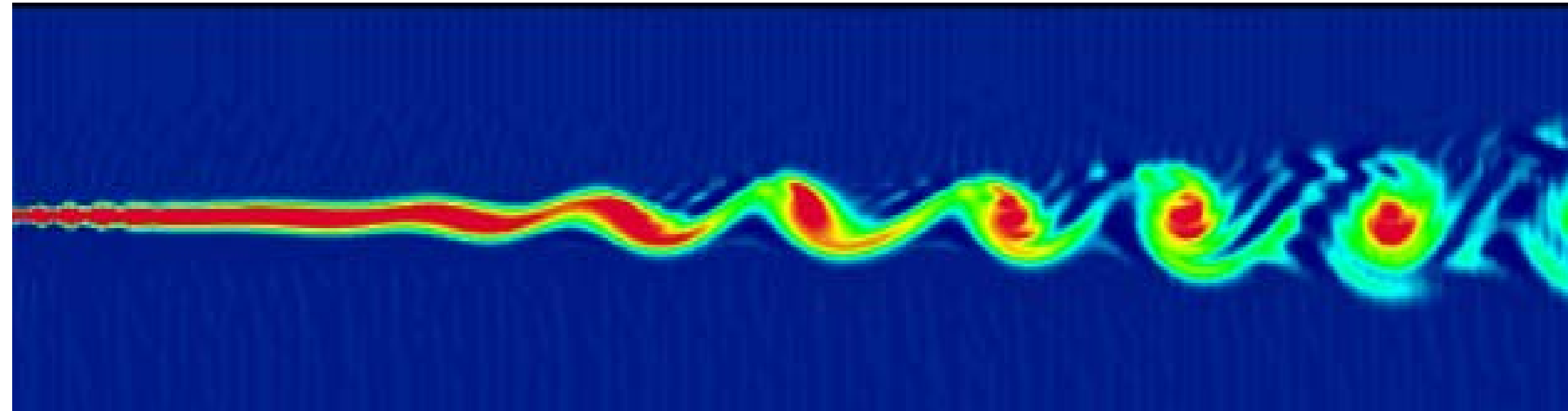
Camada de Mistura em Desenvolvimento Temporal – Escoamento Atmosférico



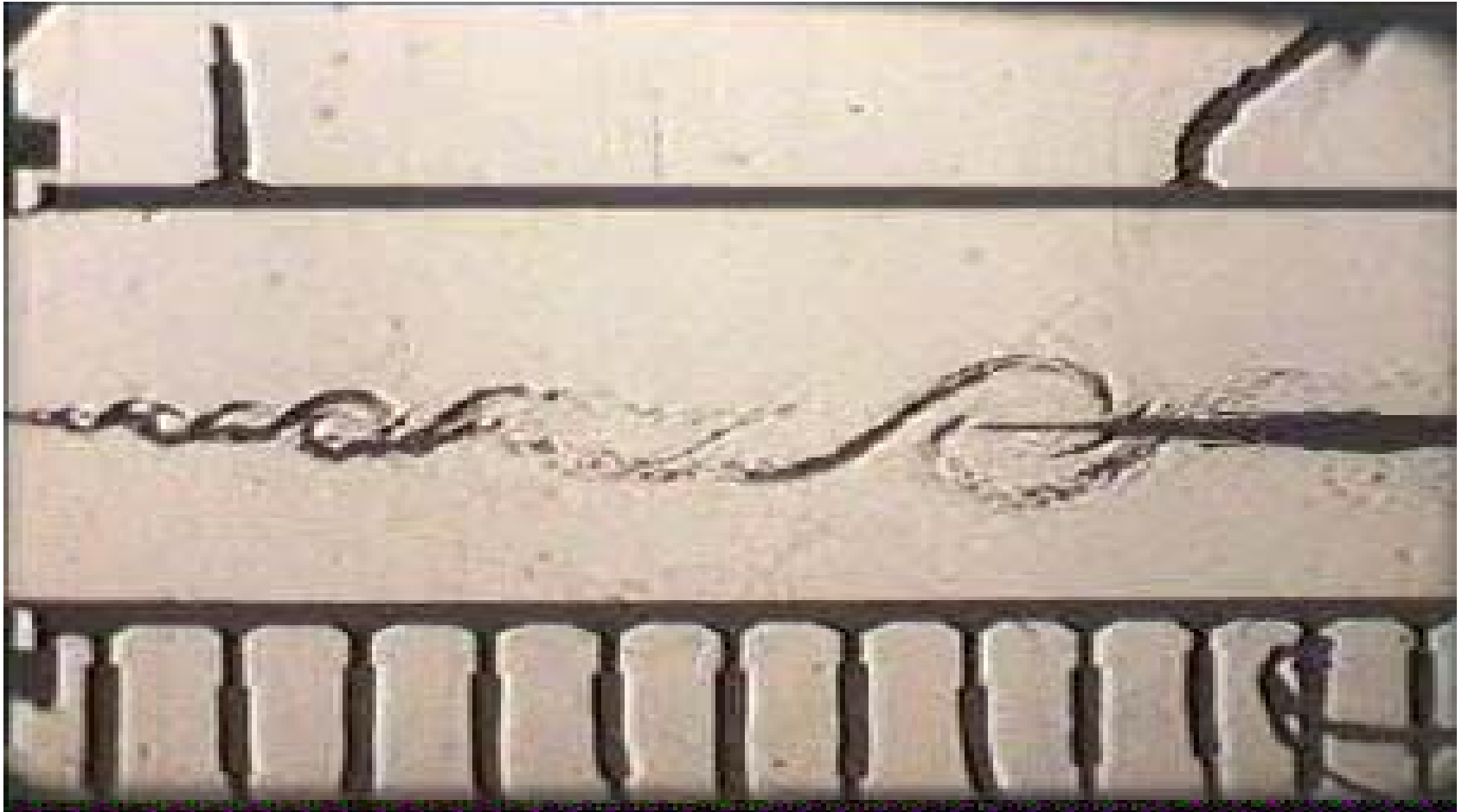
Camada de Mistura em Desenvolvimento Espacial – Emparelhamento Turbilhonar



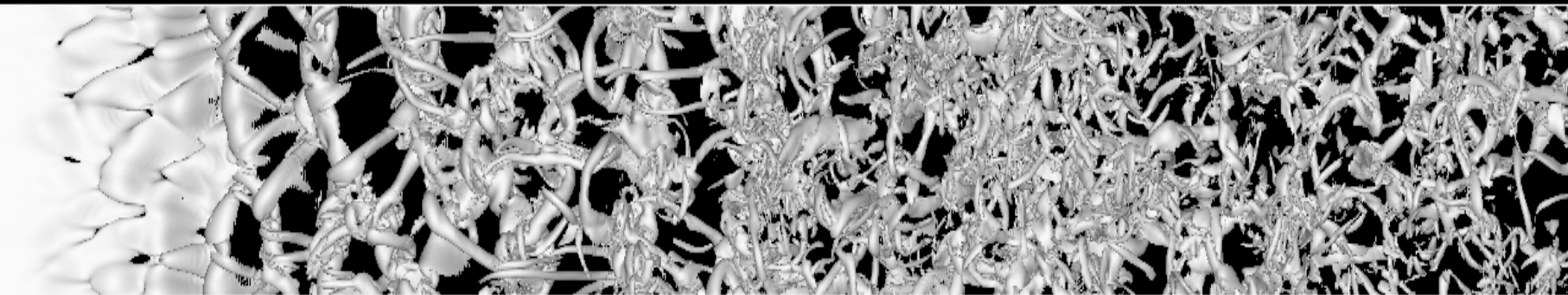
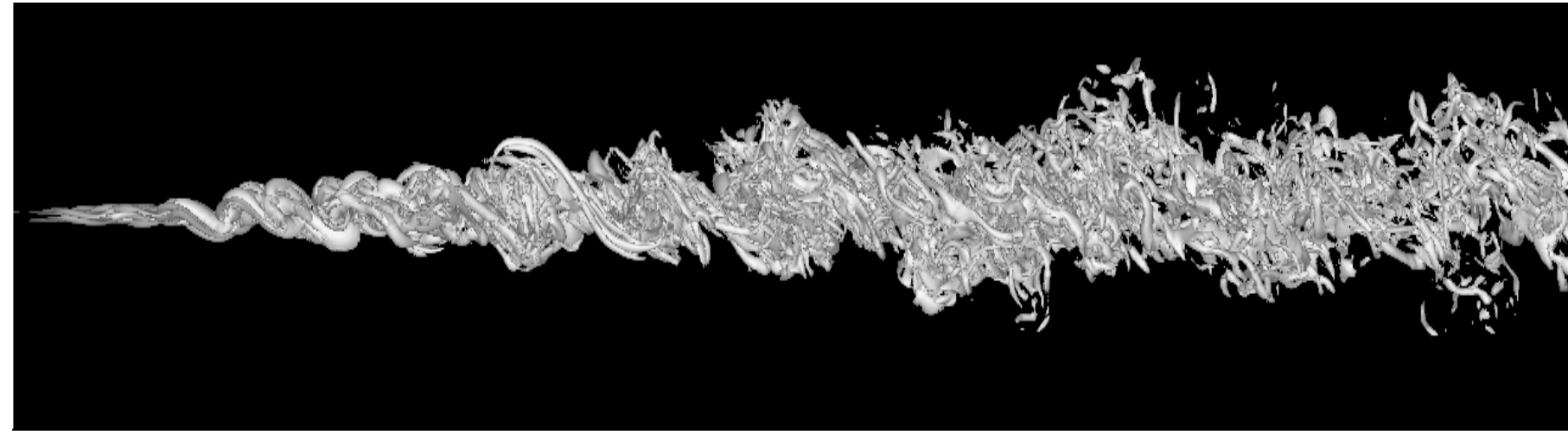
Camada de Mistura em Desenvolvimento Espacial



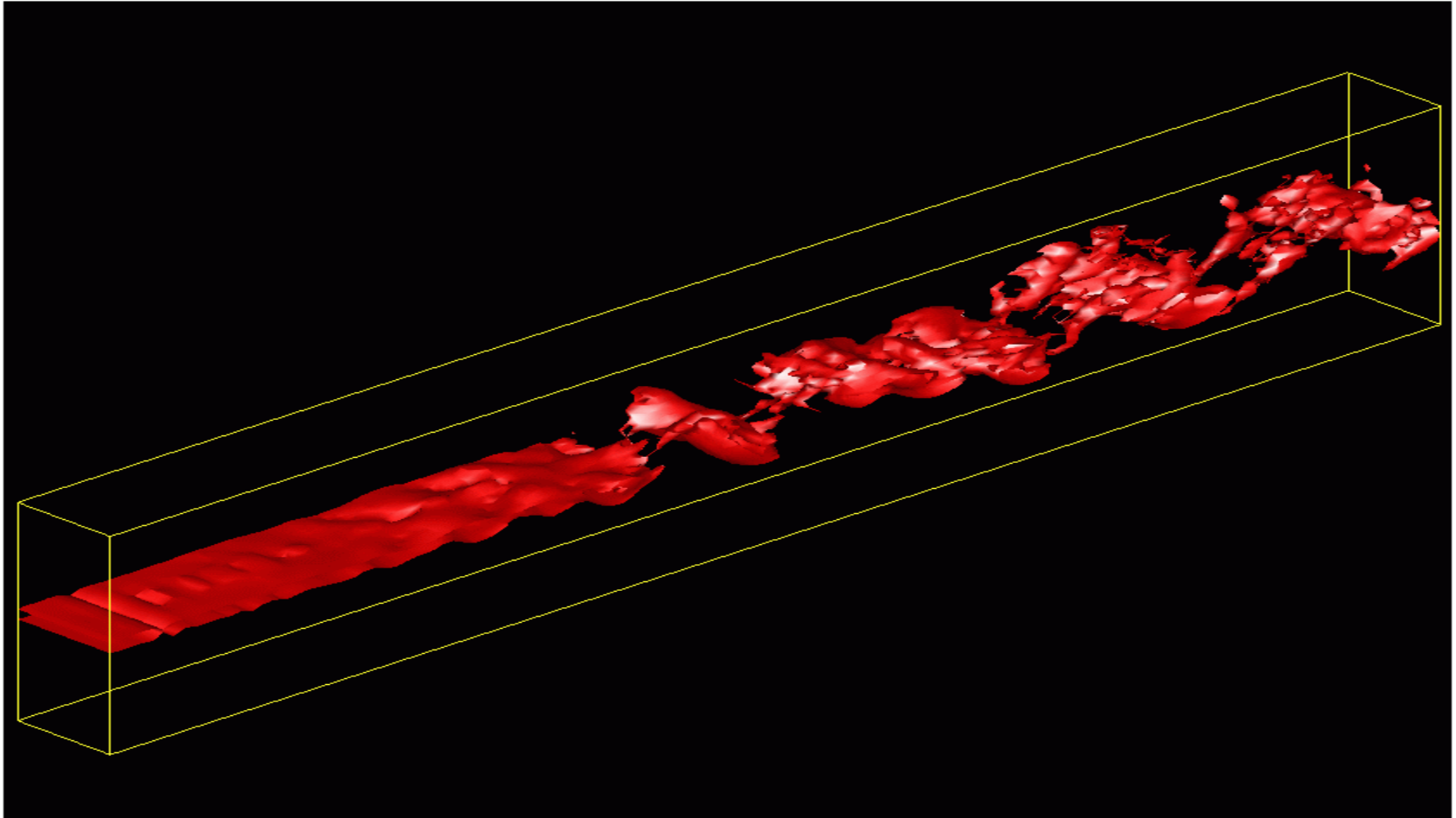
Camada de Mistura em Desenvolvimento Espacial



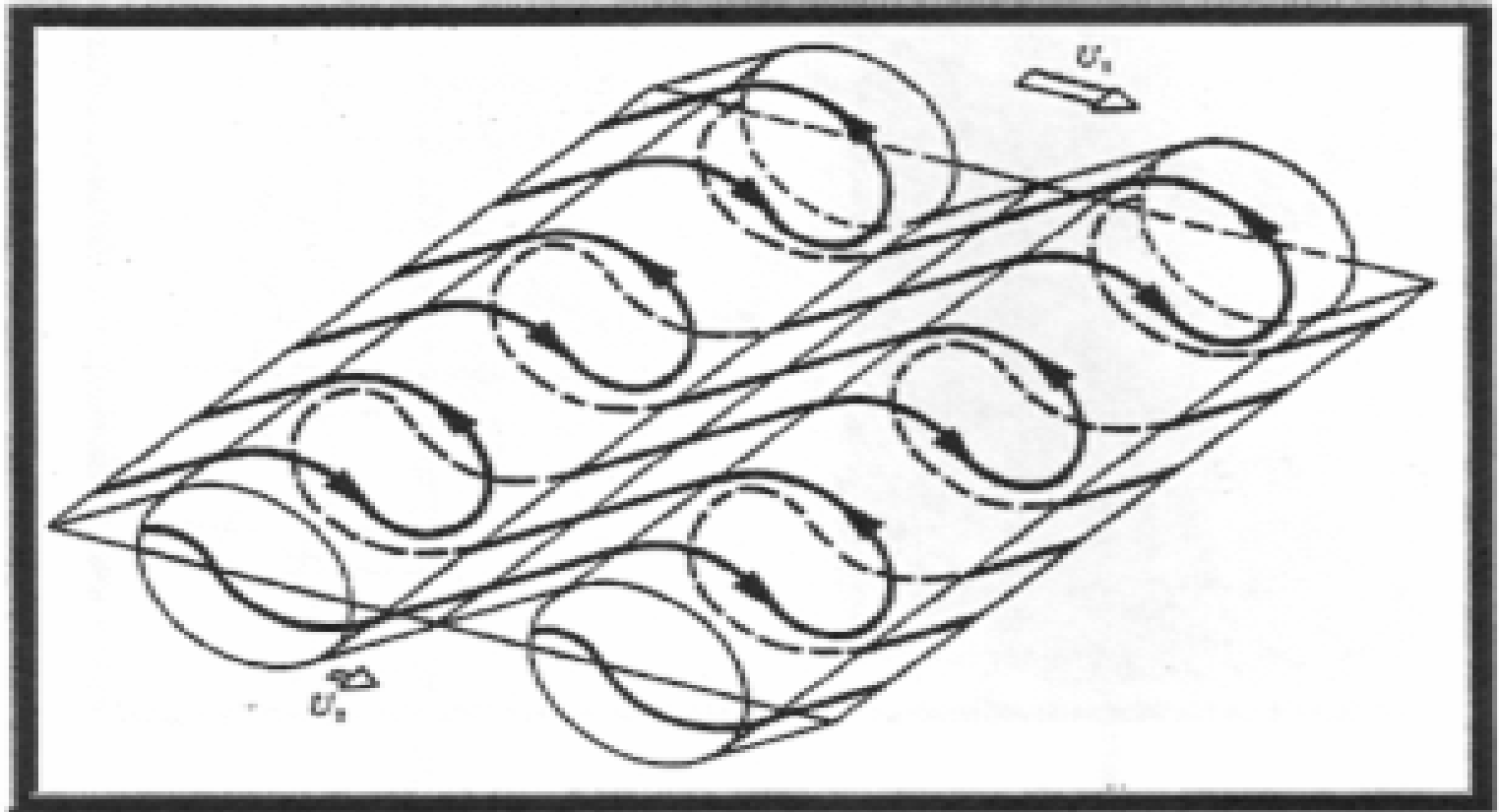
Camada de Mistura em Desenvolvimento Espacial



Camada de Mistura em Desenvolvimento Espacial



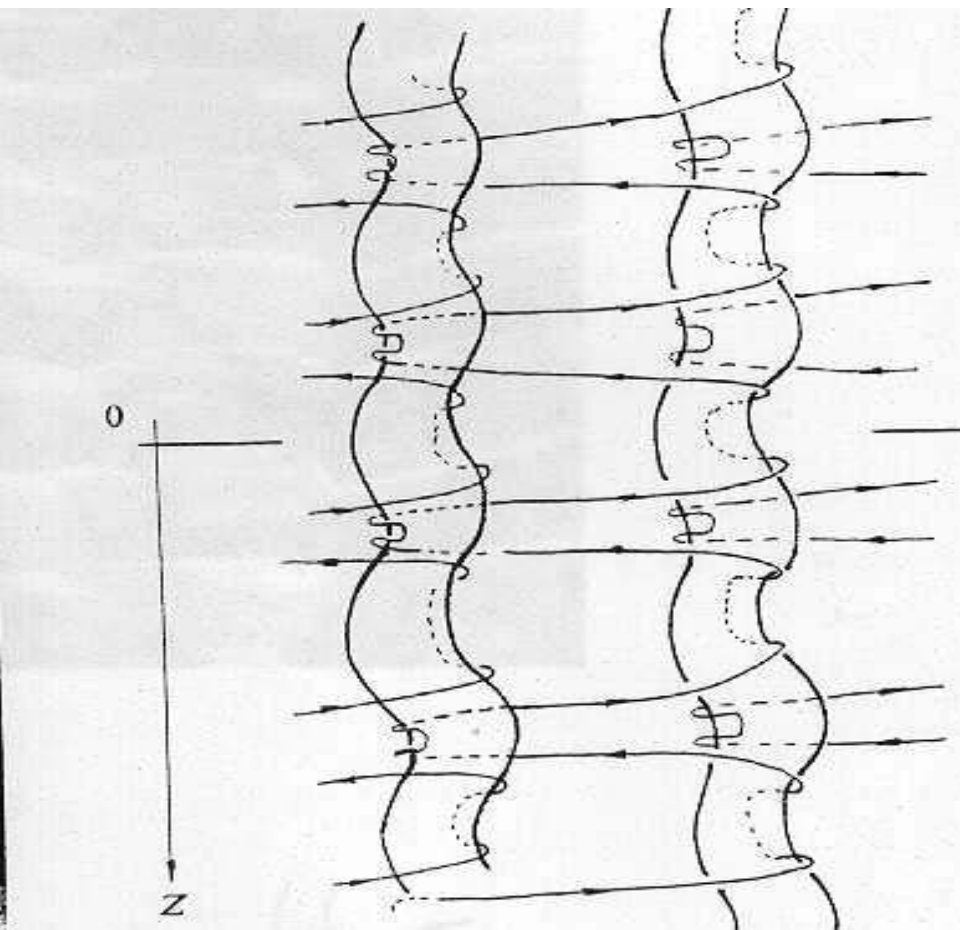
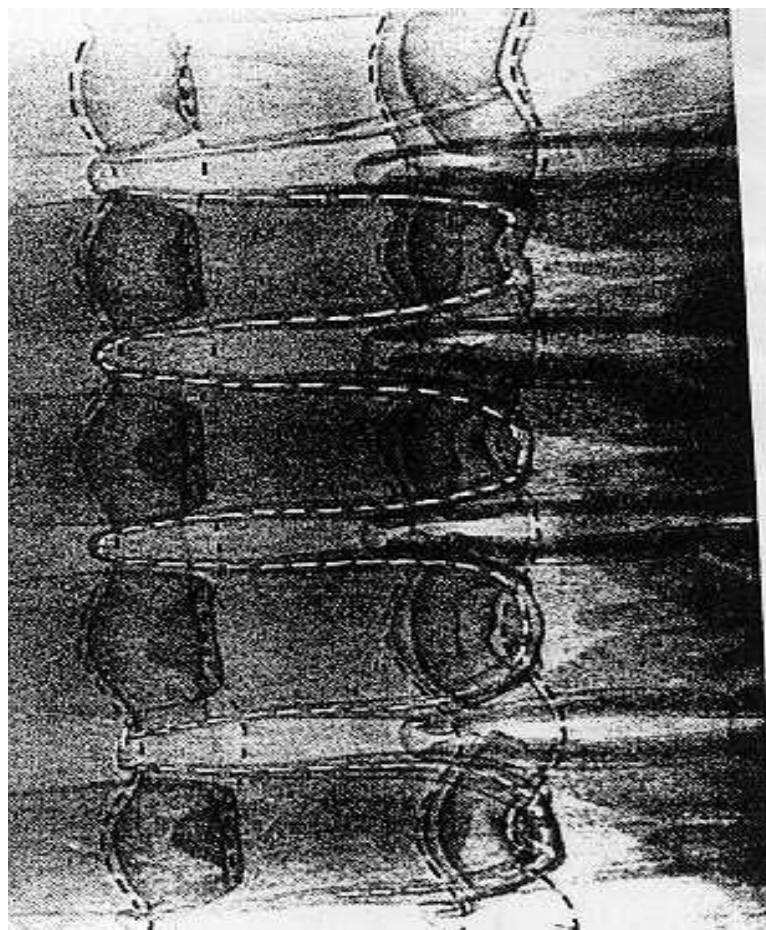
Camada de Mistura em Desenvolvimento Espacial – A Tridimensionalização da Turbulência



Camada de Mistura em Desenvolvimento Espacial – Vista Superior

Figura à esquerda – resultado experimental

Figura à direita – desenho esquemático correspondente

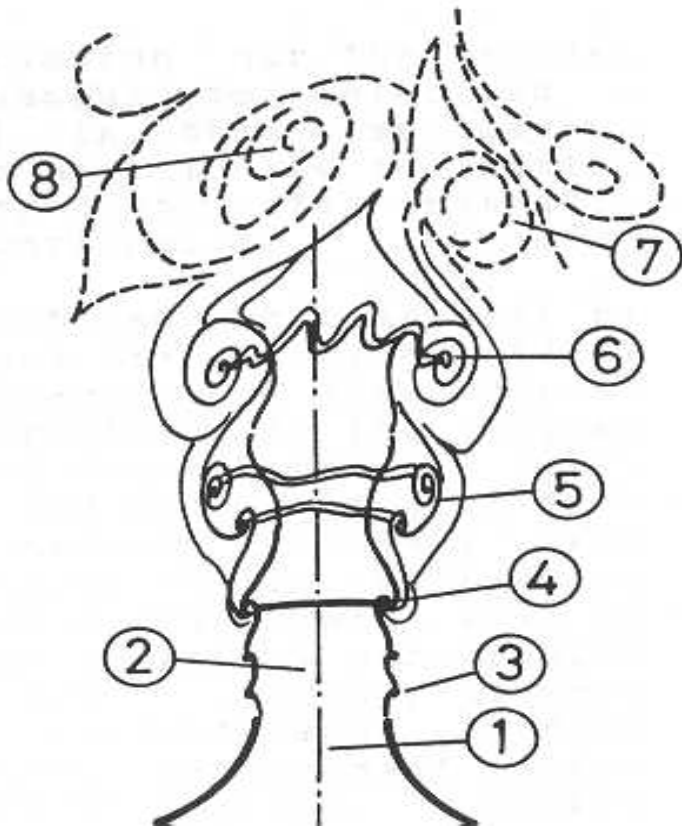


Jatos

Os jatos são classificados de acordo com a geometria que os forma. Se formados por um orifício circular serão chamados jatos redondos. Se formados por um orifício retangular, são chamados jatos planos ou retangulares.

Assim como nas camadas de mistura, a transição à turbulência acontece pela formação de instabilidades e turbilhões de Kelvin-Helmholtz.

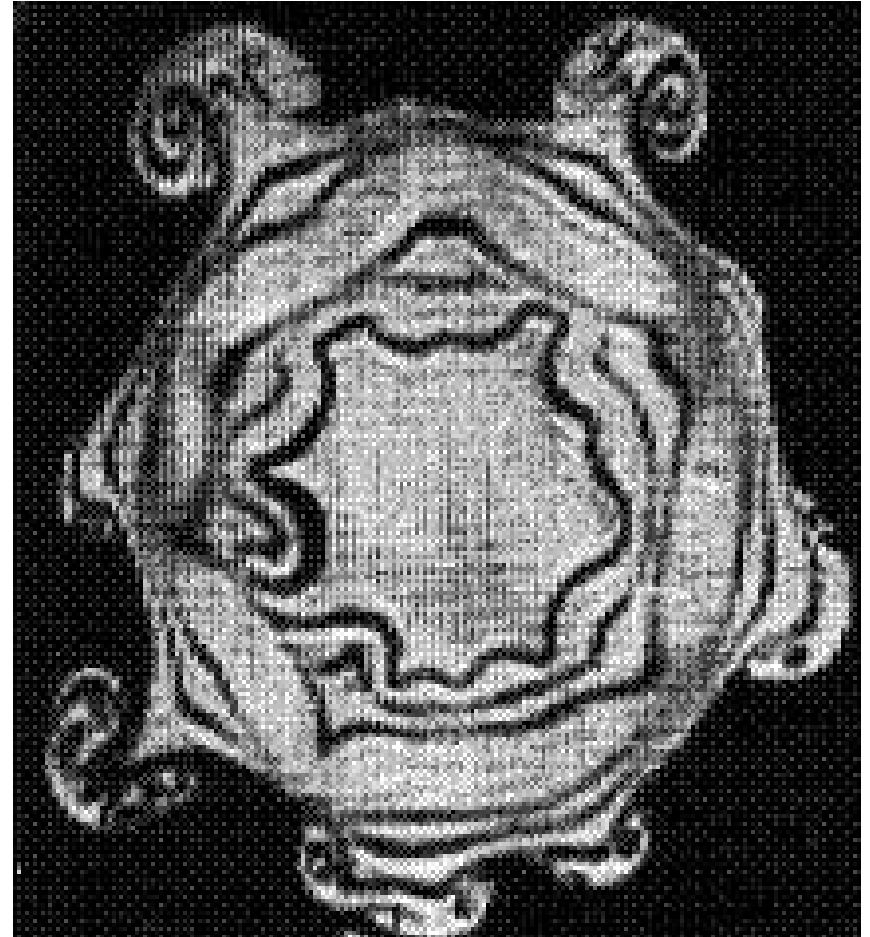
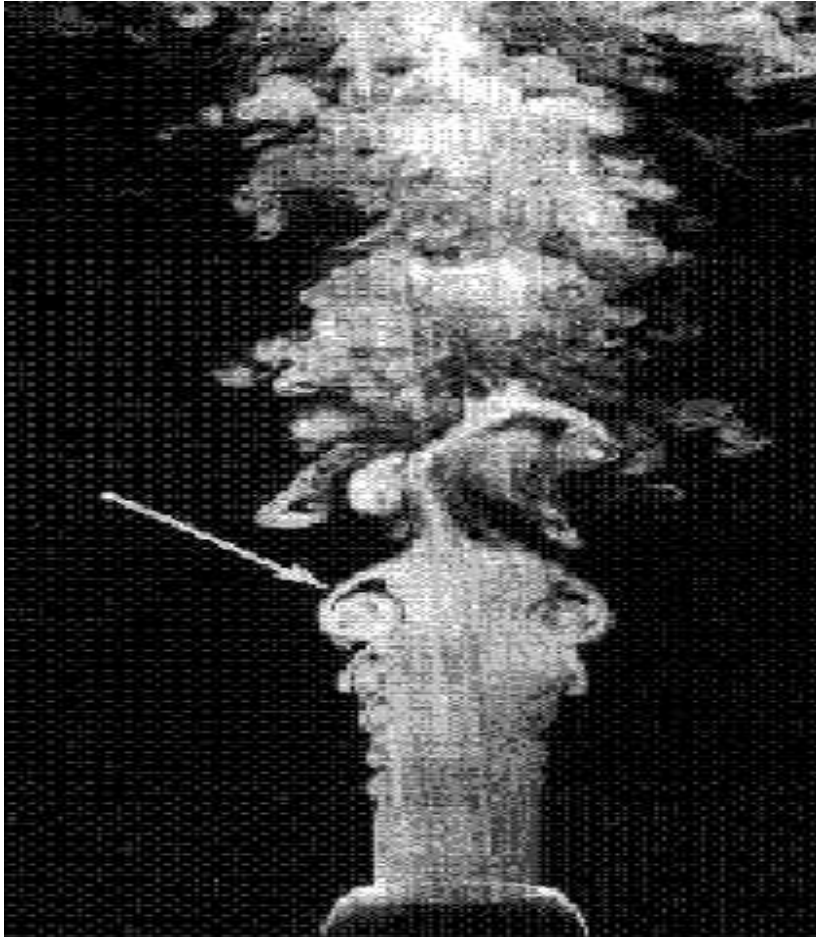
Jatos



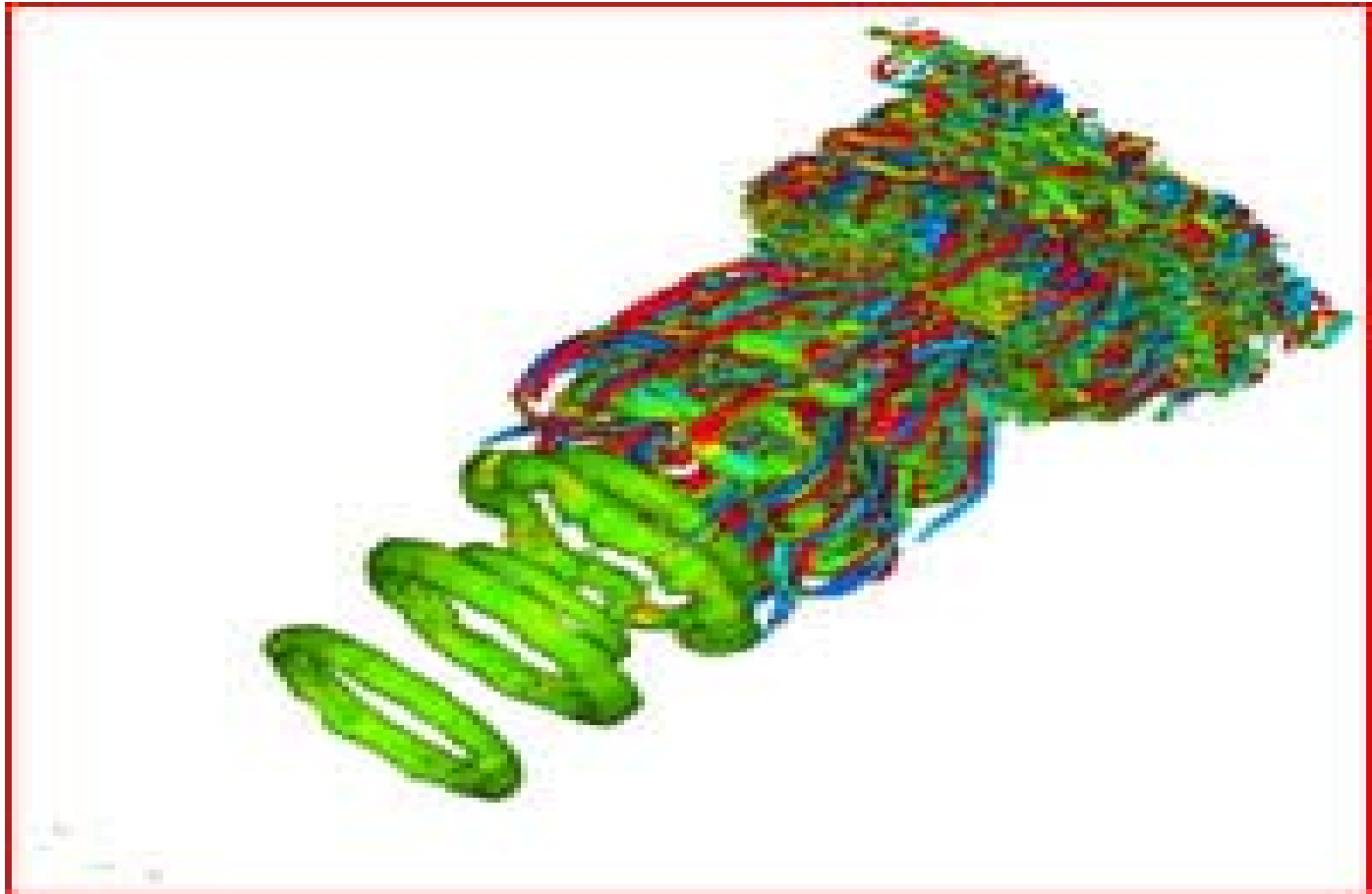
1. Bocal convergente
2. Núcleo de escoamento potencial
3. Toroide de alta concentração de vorticidade
4. Geração de vórtices toroidais “bidimensionais”
5. Emparelhamento de vórtices anulares
6. Oscilações tridimensionais sobre os vórtices toroidais
7. Degeneração em turbulência tridimensional
8. Reorganização da turbulência em grandes escalas composta de outras múltiplas escalas

Jatos

à esquerda jato em corte longitudinal
à direita jato em corte transversal

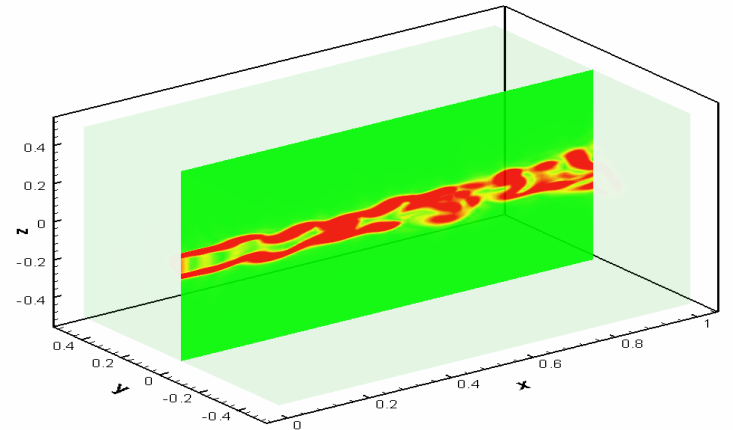
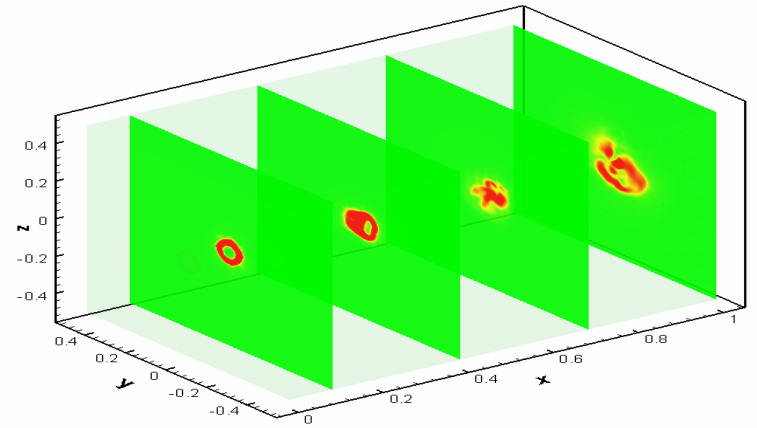
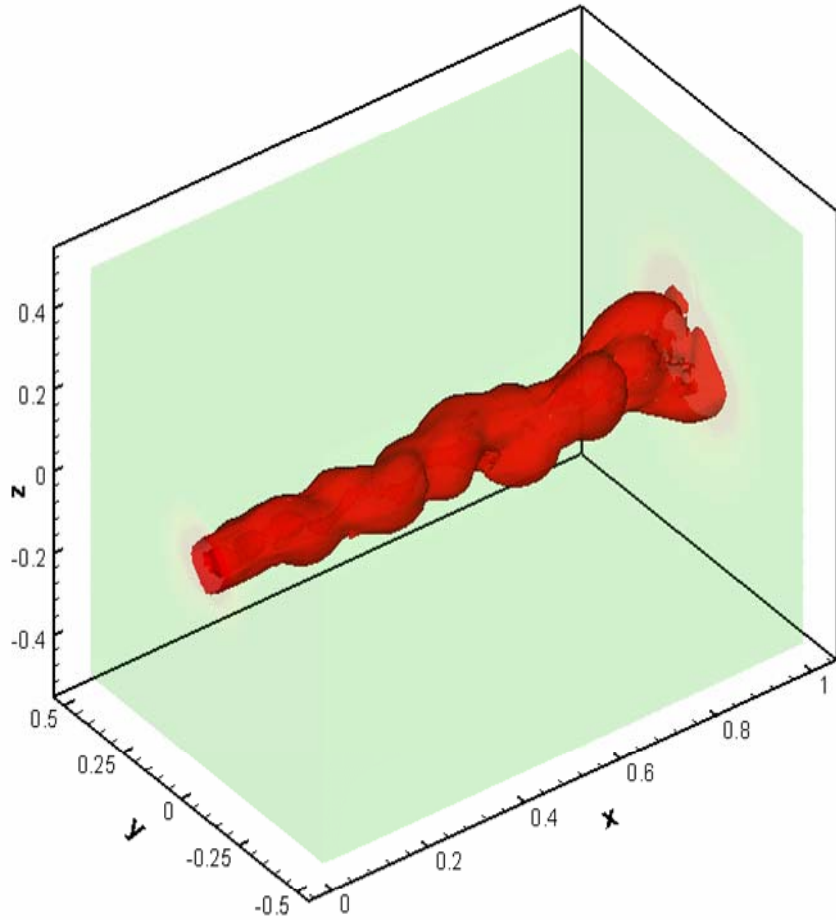


Jatos



Transition to turbulence in a coaxial jet

Jatos



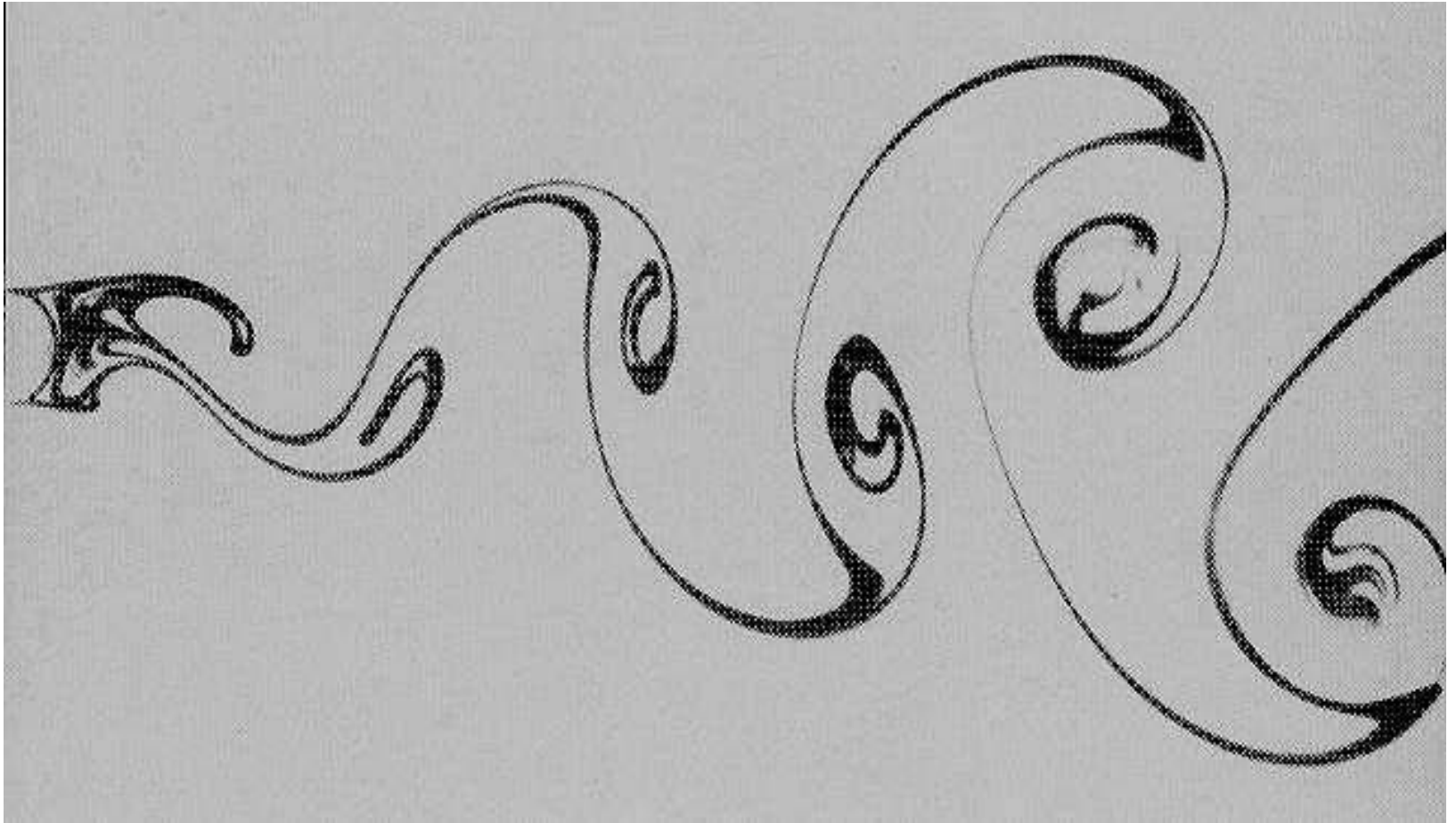
Esteiras

Os escoamentos do tipo esteira surgem à jusante de obstáculos.

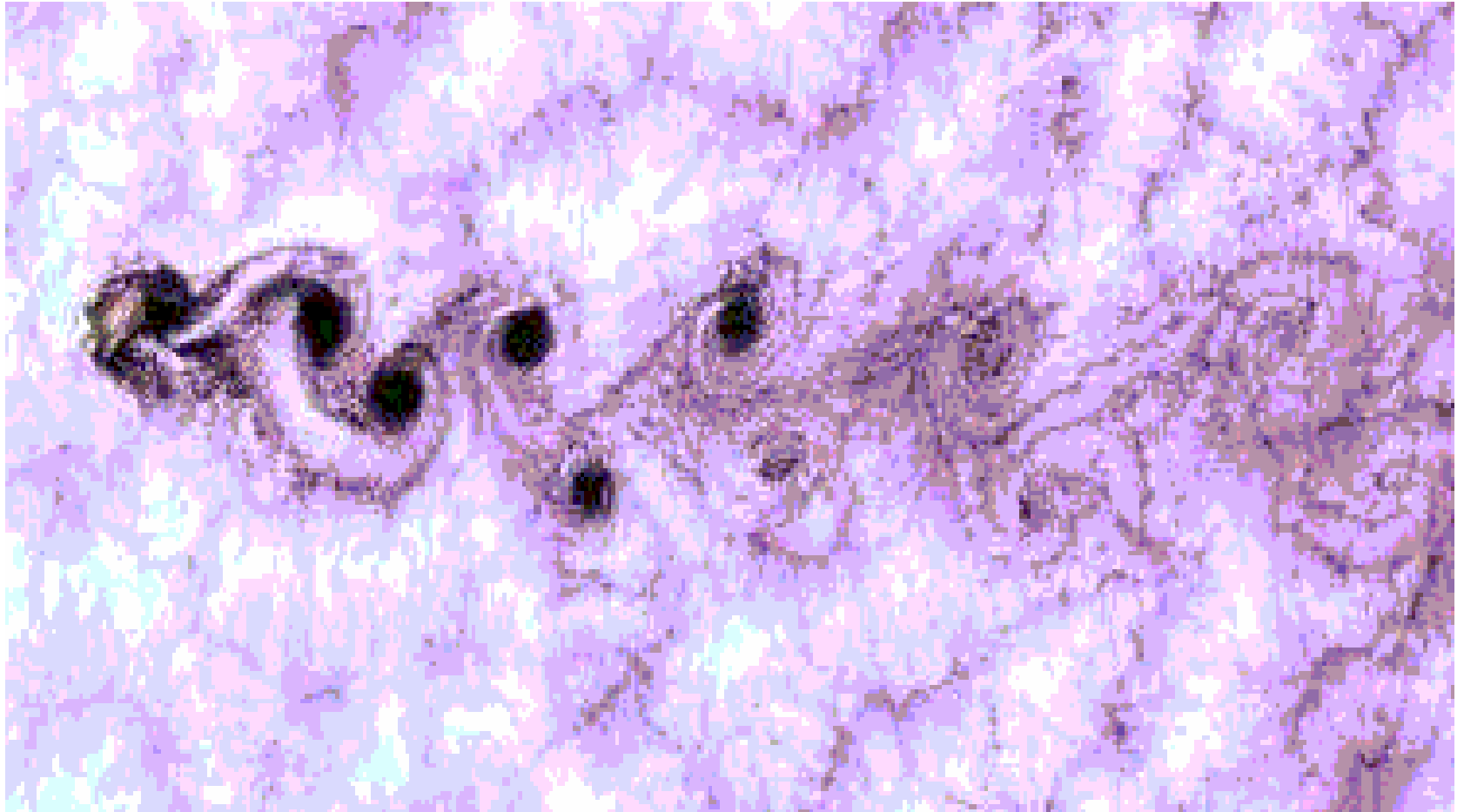
Um exemplo deste tipo de escoamento são as esteiras de Von Karman que se formam atrás de pilares de pontes

Esteiras

Esteira de Von Karman formada a jusante de uma placa rombuda. Formação de turbilhões coerentes num modo denominado sinuoso.

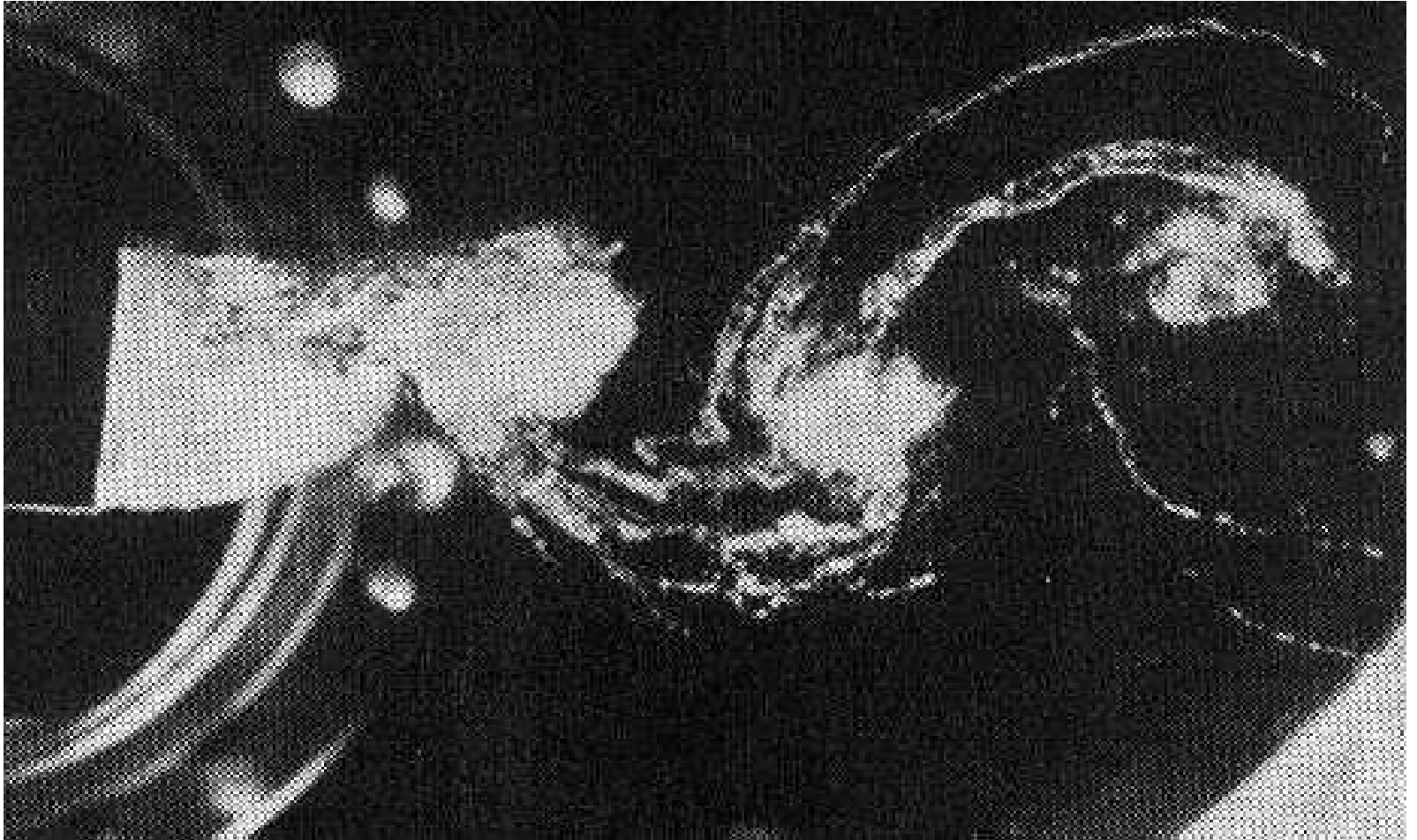


Esteiras



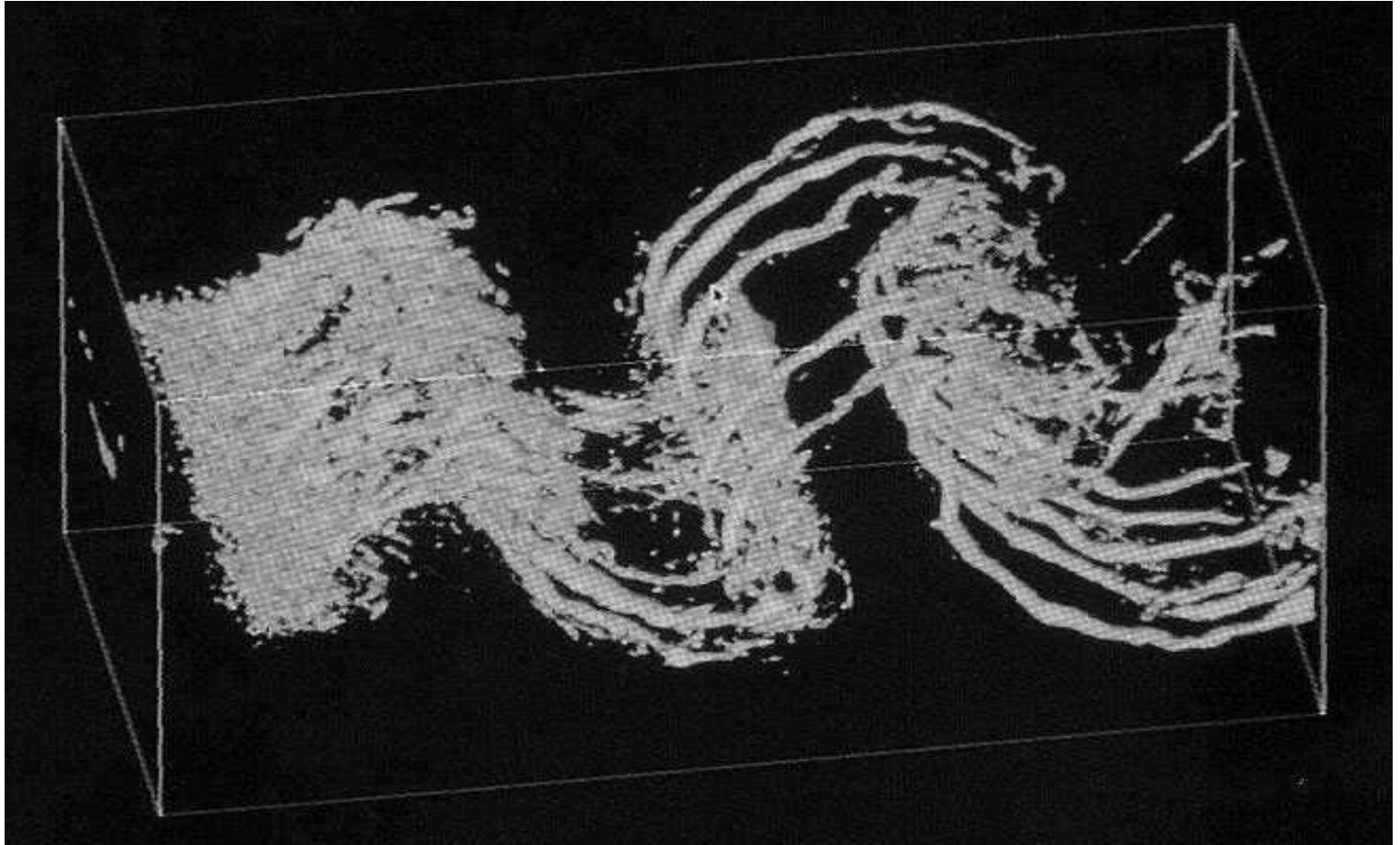
Esteiras

Vista Superior

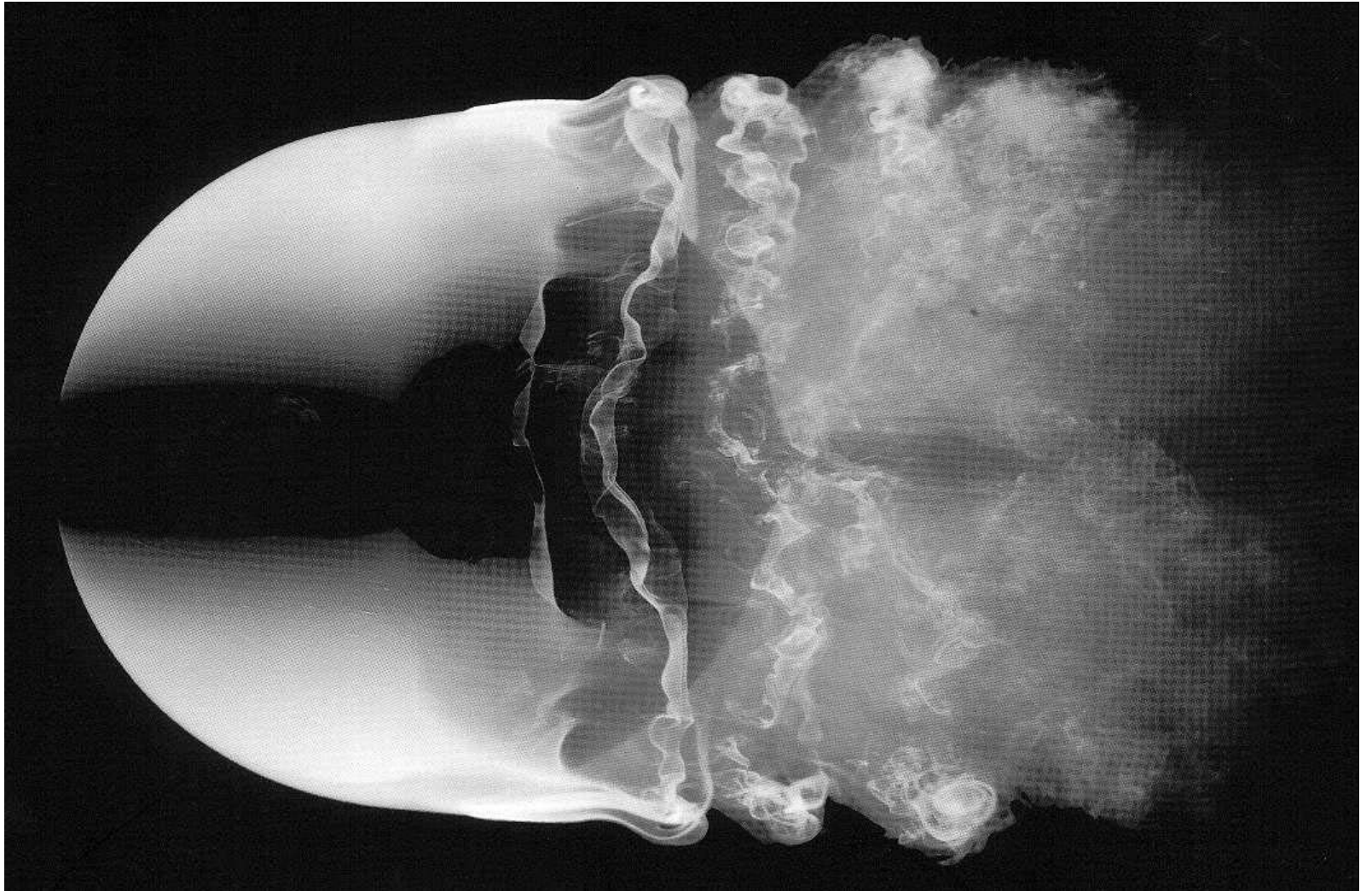


Esteiras

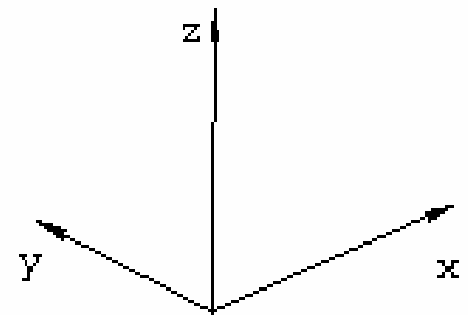
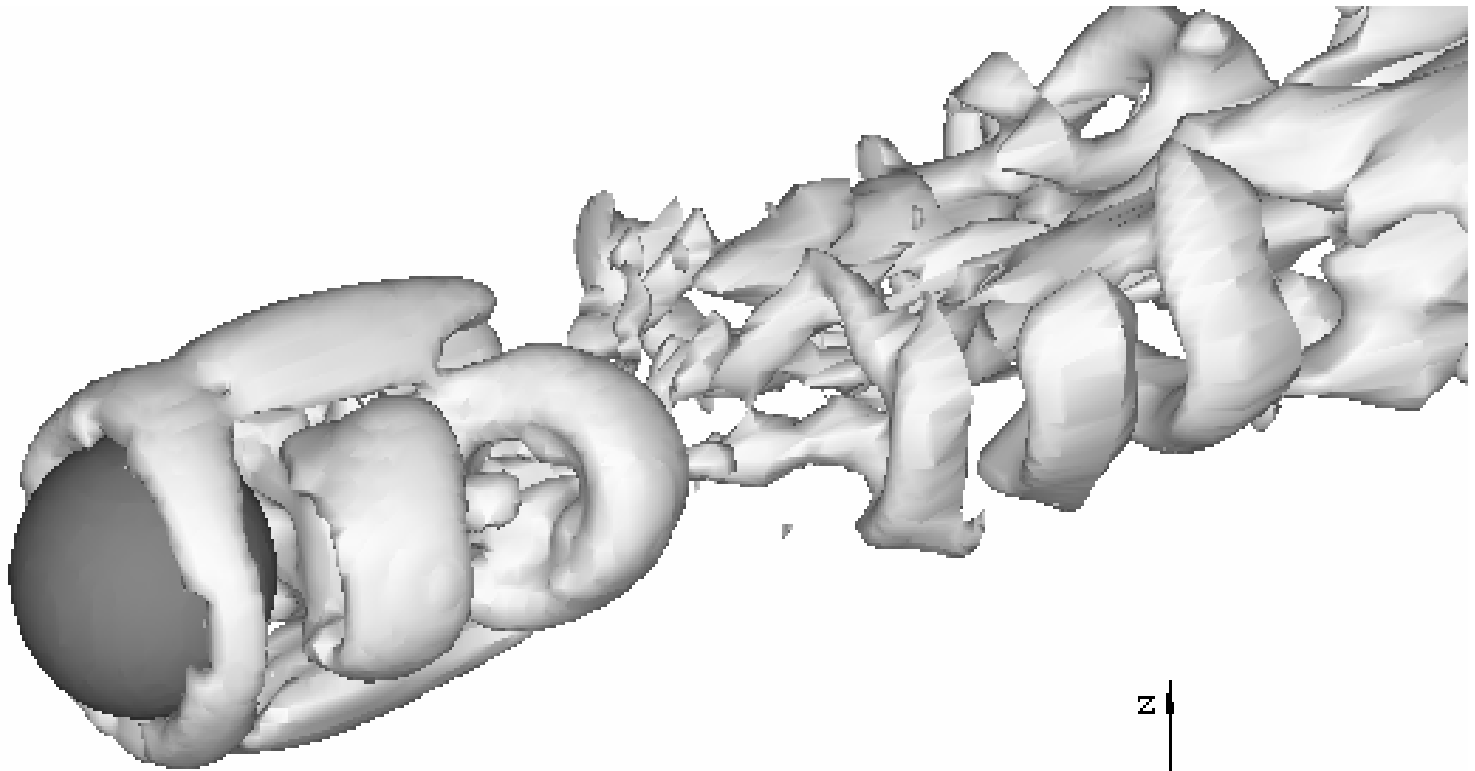
Esteira Tridimensional a Jusante de Obstáculo – Lesieur (1994)



Esteiras



Esteiras

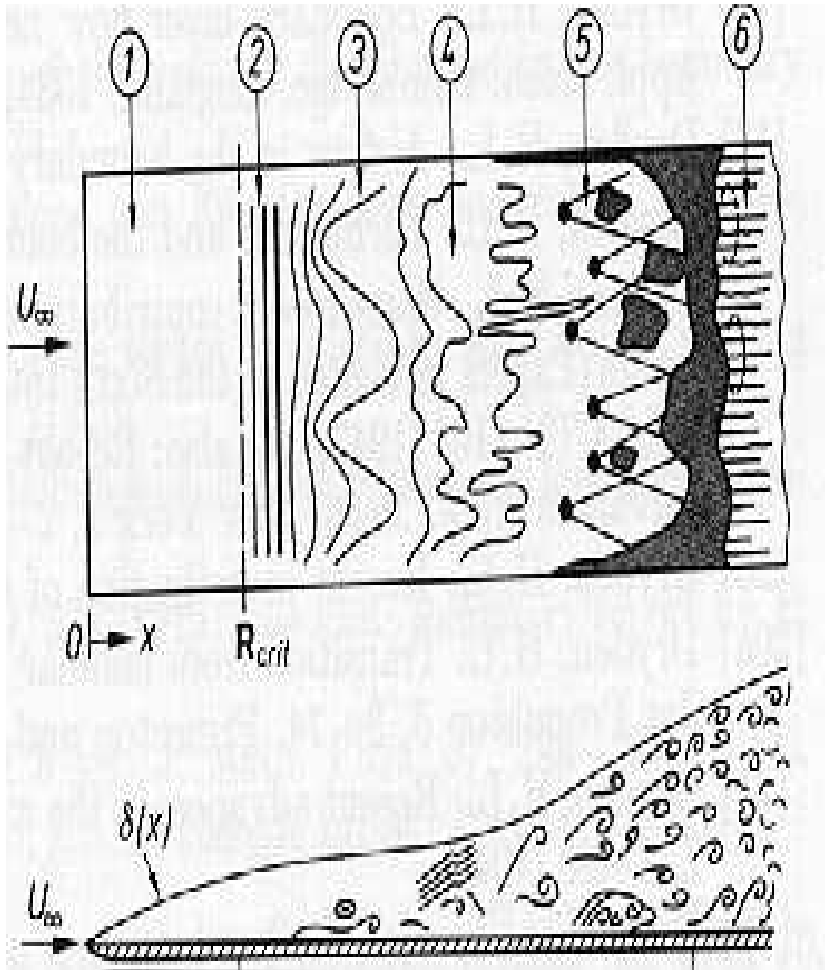


Camada Limite

Um fluido se movendo a altos números de Reynolds sobre uma superfície pode produzir uma camada limite turbulenta. Neste caso o efeito de atrito viscoso sobre o corpo aumenta.

A compreensão dos fenômenos físicos envolvidos na transição à turbulência de camada limite é motivada pelos anseios em se reduzir o efeito de arrasto sobre aviões e embarcações.

Camada Limite

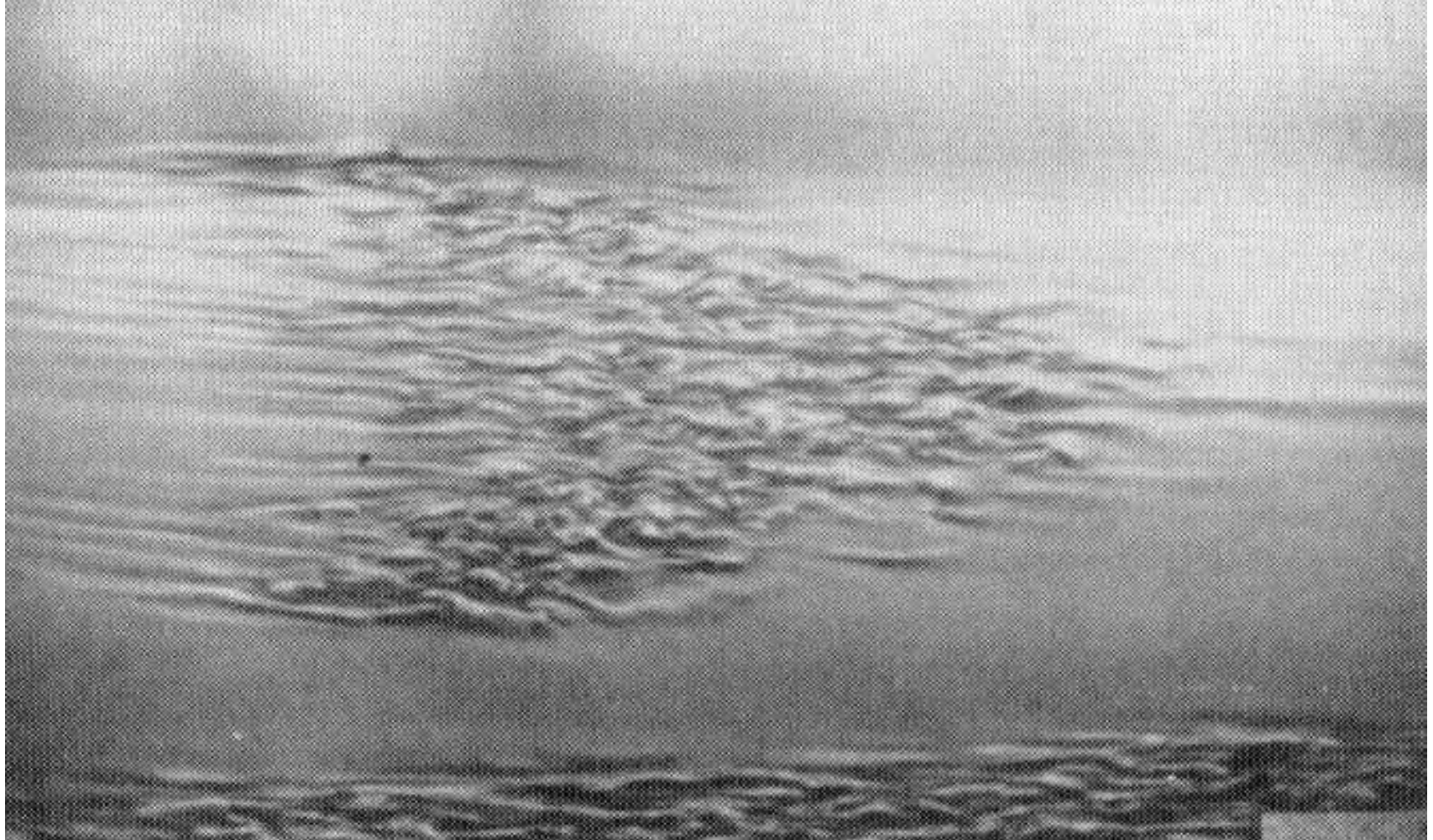


Transição à Turbulência em camada Limite

1. Região de escoamento laminar
2. Primeiras instabilidades de pequena amplitude-ondas de Tollmien-Schlichting
3. Amplificação de das ondas em taxa máxima gerando as instabilidades em “grampo de cabelo”
4. Surgimento dos Bursts turbulentos que geram transportes violentos de matéria da parede para dentro da camada limite
5. Spots turbulentos-altas concentrações de energia cinética turbulenta
6. Camada limite completamente turbulenta

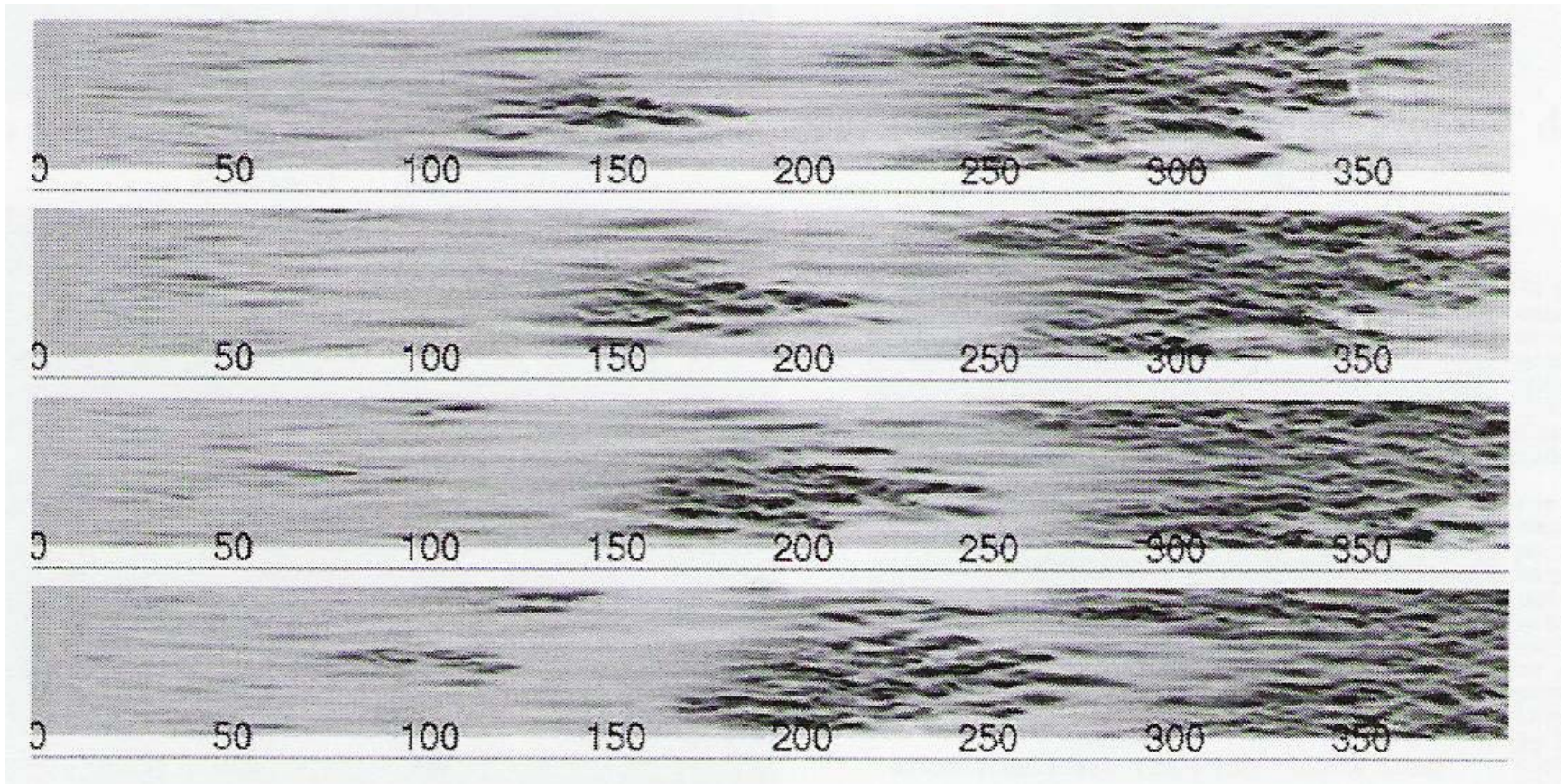
Camada Limite

Detalhe de Spot Turbulento - Alta concentração de energia cinética turbulenta.



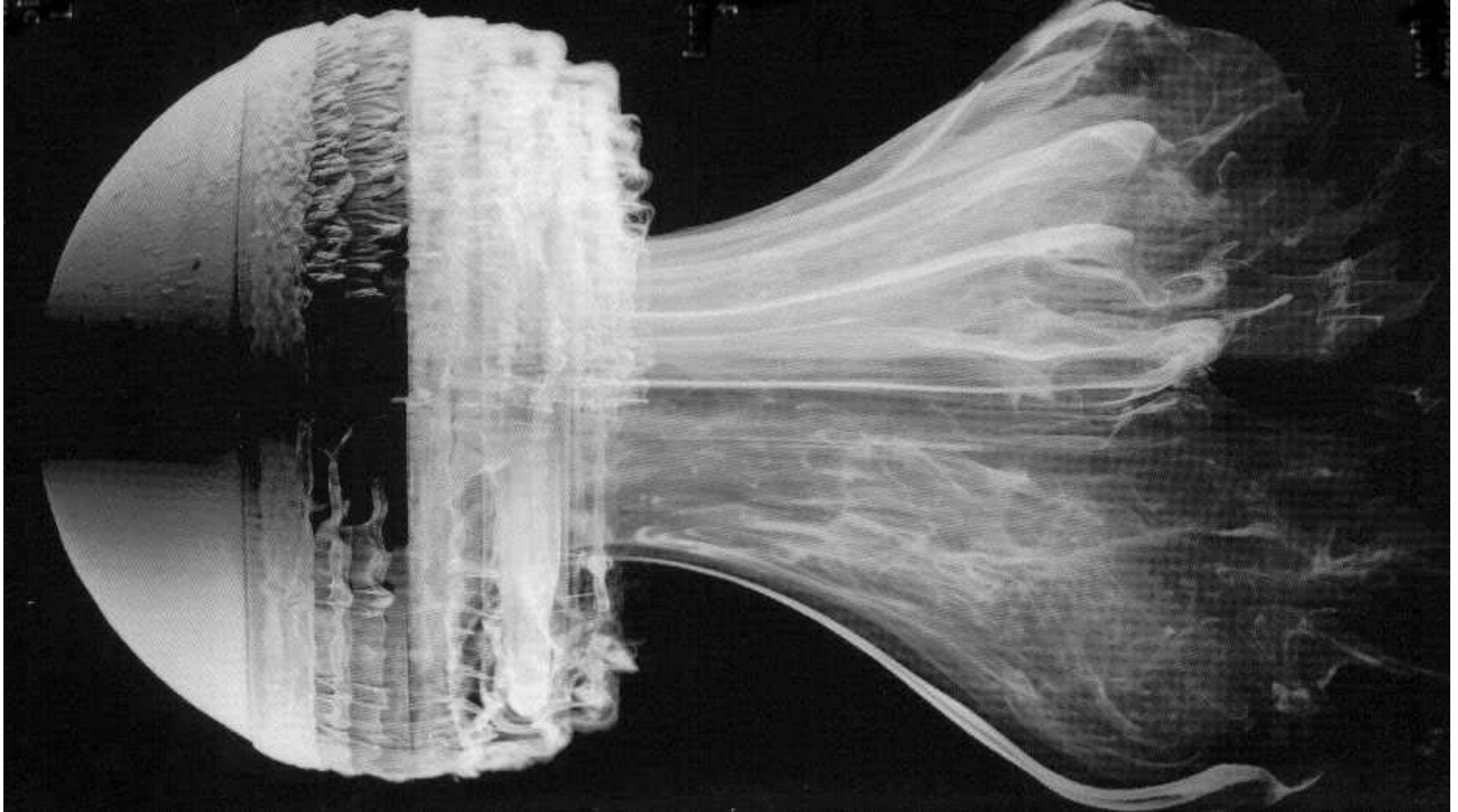
Camada Limite

Visualização Formação de Spots Turbulentos



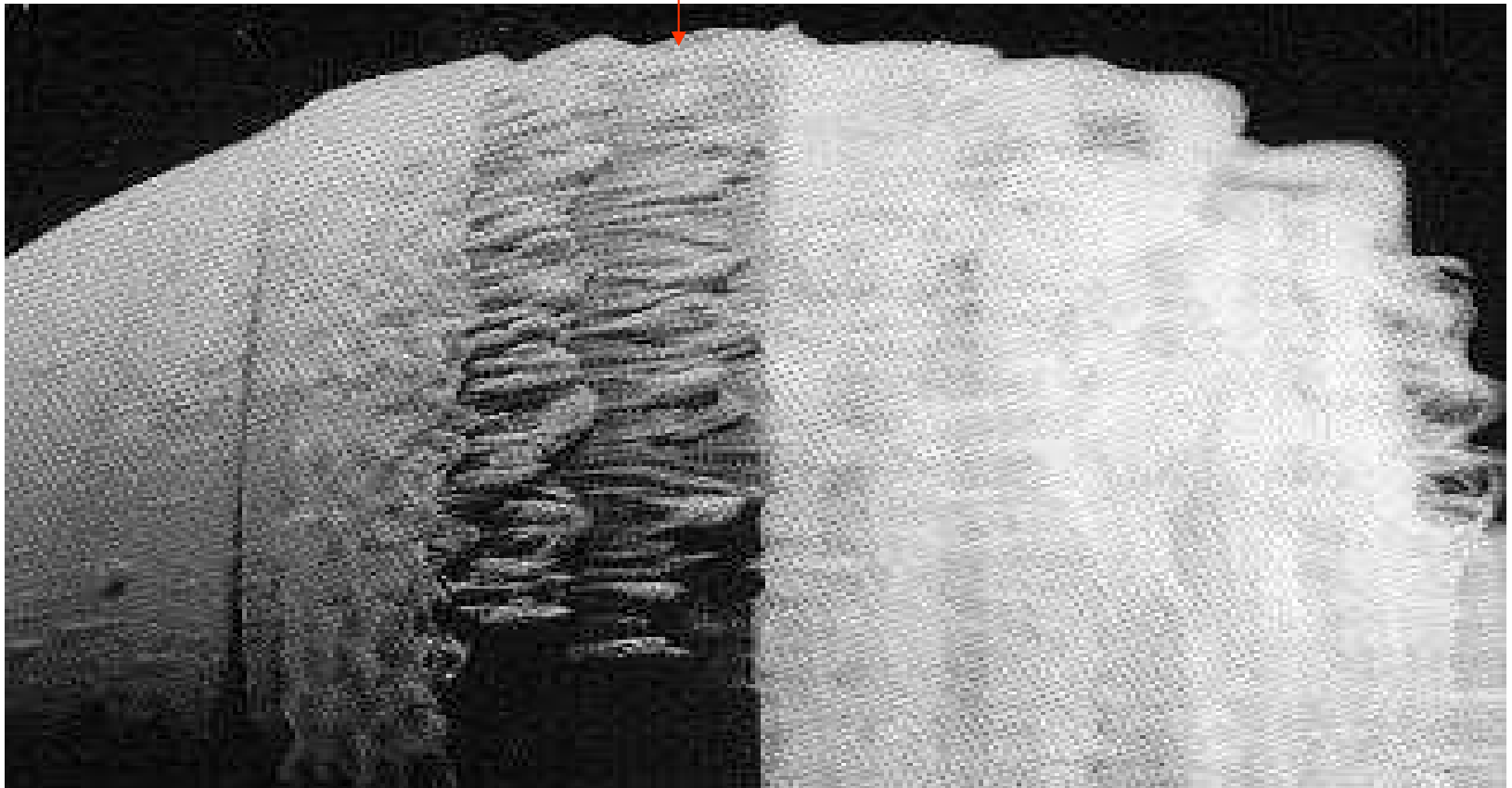
Camada Limite

Visualização da Formação de Camada Limite Transicional sobre Esfera.



Camada Limite

Instabilidades em “Grampo de Cabelo”



Outros Tipos de Escoamento que Transicionam

1. Convecção de Rayleigh-Bénard
2. Convecção de Marangoni
3. Instabilidades de Taylor-Couette

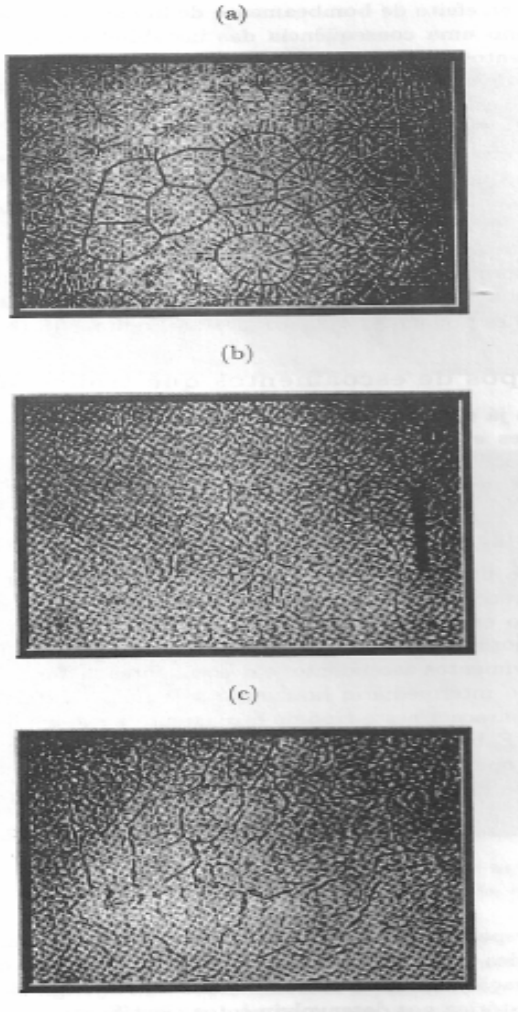
Convecção de Rayleigh-Béarnard

O número de Rayleigh é o parâmetro que determina a transição à turbulência neste tipo de escoamento.

$$Ra = \text{Número de Rayleigh} = \frac{\beta g \Delta\theta d^3}{\alpha \nu}$$

Se o número de Rayleigh assume um valor superior a certo valor crítico, o processo de amplificação de perturbações tem início e assim se formam as chamadas instabilidades de Rayleigh-Béarnard.

Convecção de Rayleigh - Bénard

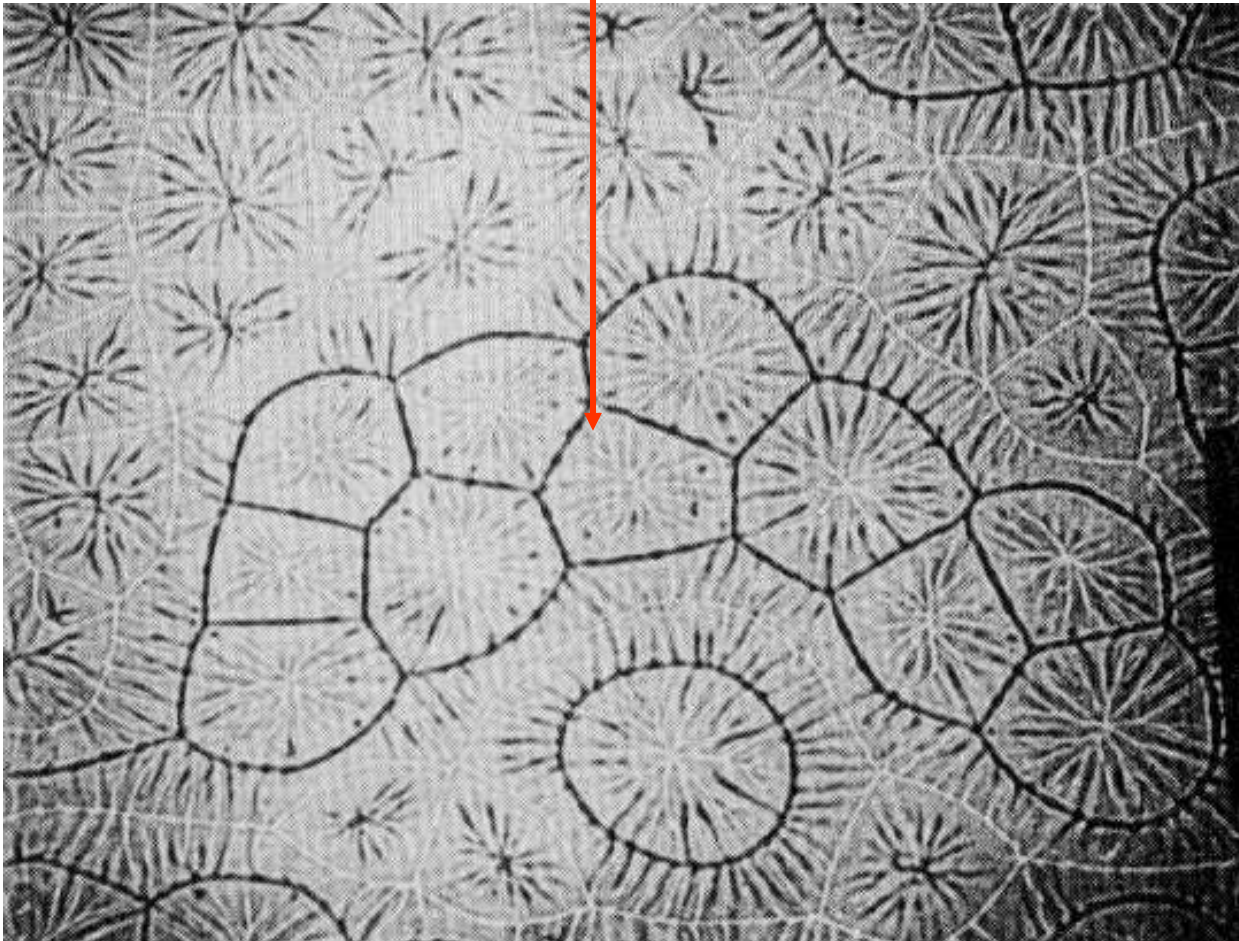


Nas figuras a, b e c ao lado, mostra-se três diferentes configurações de escoamentos numa camada horizontal relativas a três regimes diferentes.

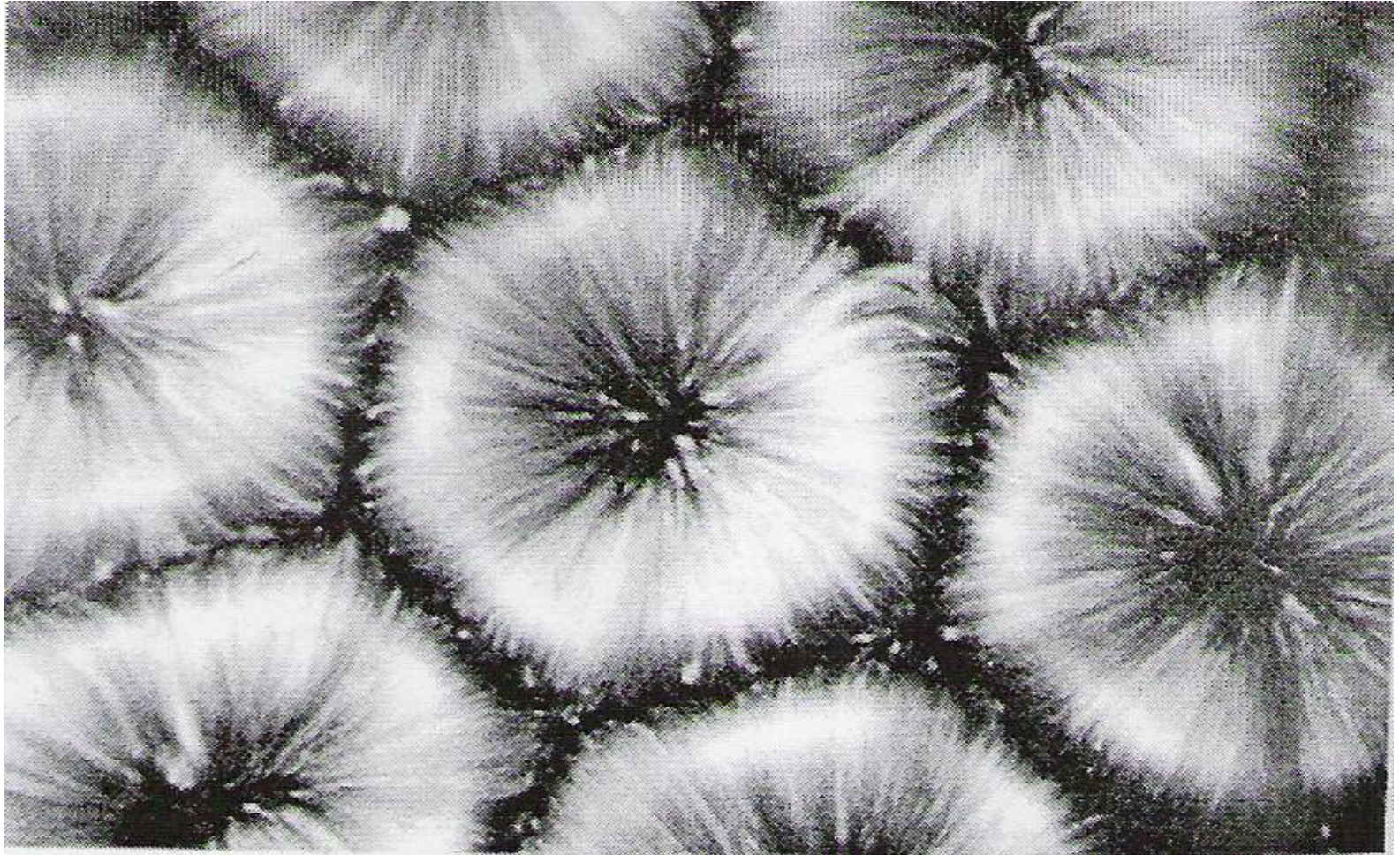
- a. $Ra=4,8 \times 10^4$ → Têm-se as células de Bénard ainda bem organizadas.
- b. $Ra=1,3 \times 10^5$ → Desaparecem as células de Bénard e o movimento parece um pouco mais desorganizado.
- c. $Ra=1,7 \times 10^5$ → Transição à turbulência torna-se evidente

Convecção de Rayleigh-Bénard

Células de Bénard



Convecção de Rayleigh-Bénard



Convecção de Marangoni

Ocorre no caso de um fluido sobre uma superfície plana, tendo uma superfície livre. Se há diferença de temperatura entre a placa ao fundo, e a superfície livre, movimentos convectivos se estabelecem. Na superfície livre há efeitos interfaciais. Da combinação destes efeitos formam-se na superfície do fluido células bem organizadas chamadas células de Marangoni.

Convecção de Marangoni

Traços de células Hexagonais Convectivas de Marangoni formadas no solo de um lago após processo de secagem.



A Convecção Natural



A Convecção Natural

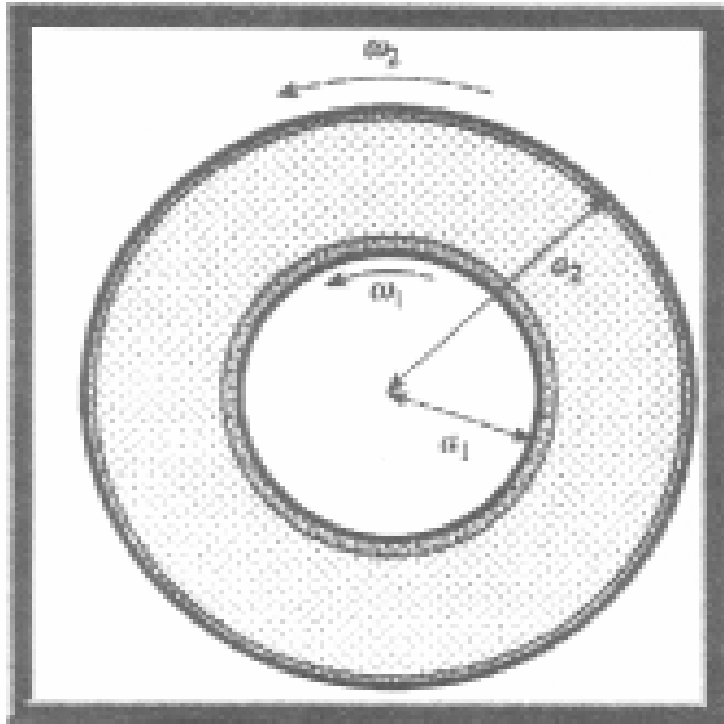


Instabilidades de Taylor-Couette

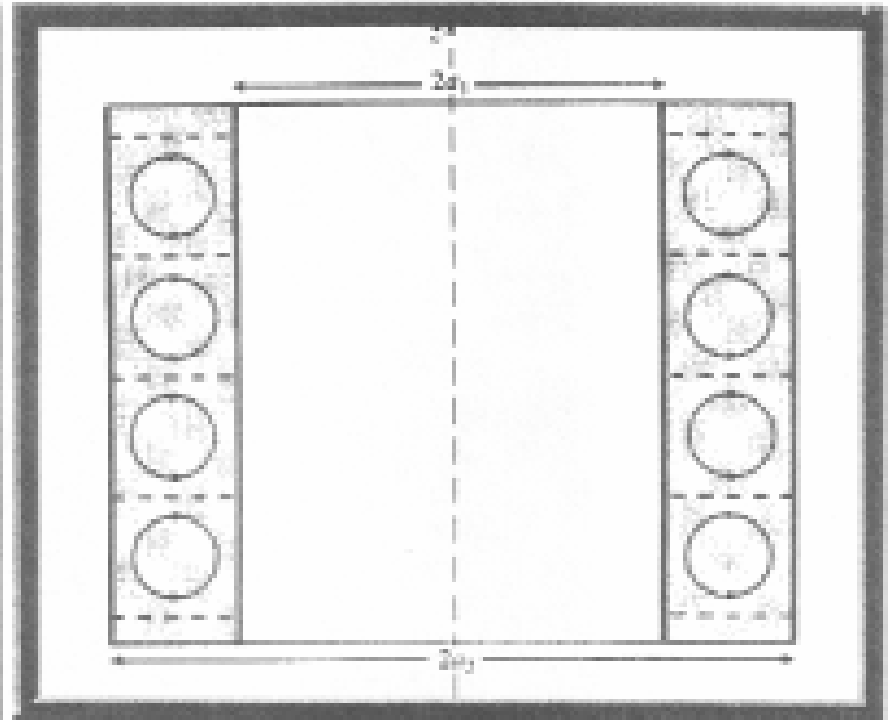
Num escoamento de Couette, as forças centrífugas geradas pela rotação levam à formação e manutenção das chamadas instabilidades de Taylor-Couette. As instabilidades típicas do escoamento sofrem amplificação e sobre estas surgem novos conjuntos de instabilidades, e assim por diante até a degeneração em um largo espectro de instabilidades característico da turbulência.

Instabilidades de Taylor-Couette

Esquema ilustrativo do escoamento de Couette

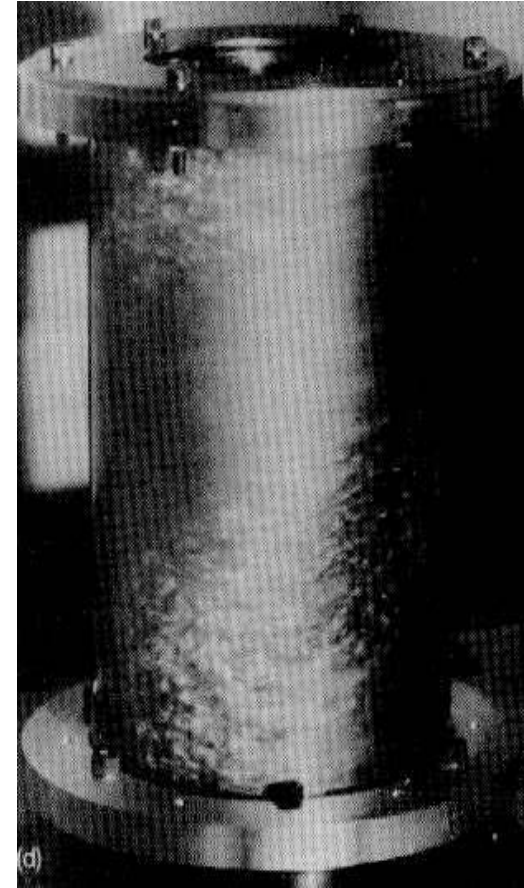
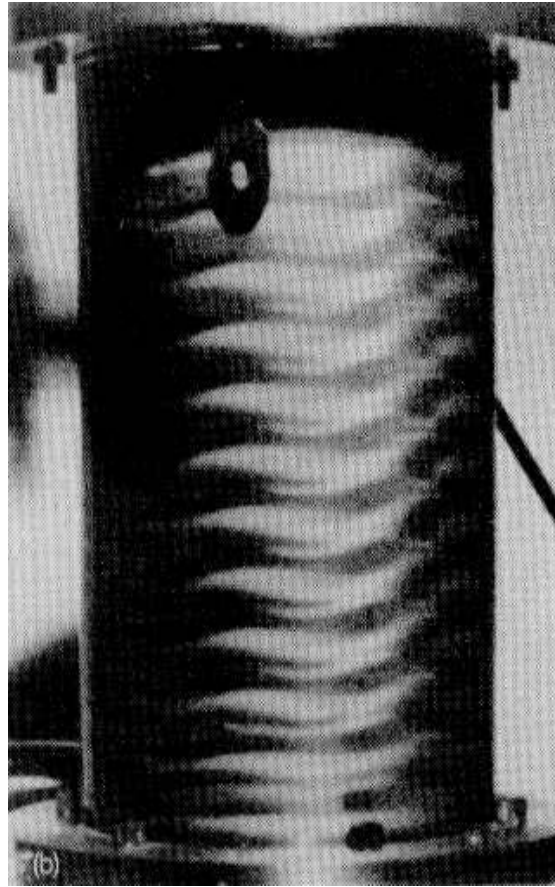
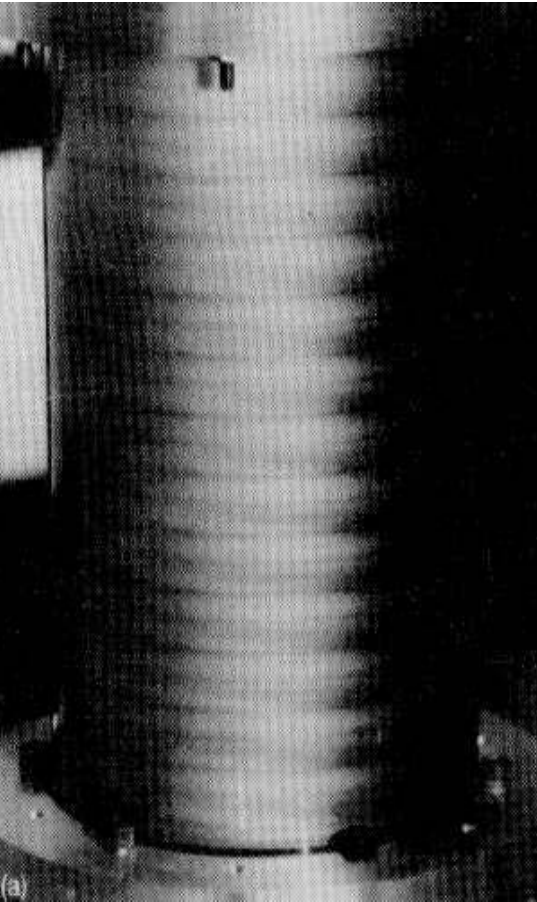


(a)



(b)

Instabilidades de Taylor-Couette



Escoamentos Complexos

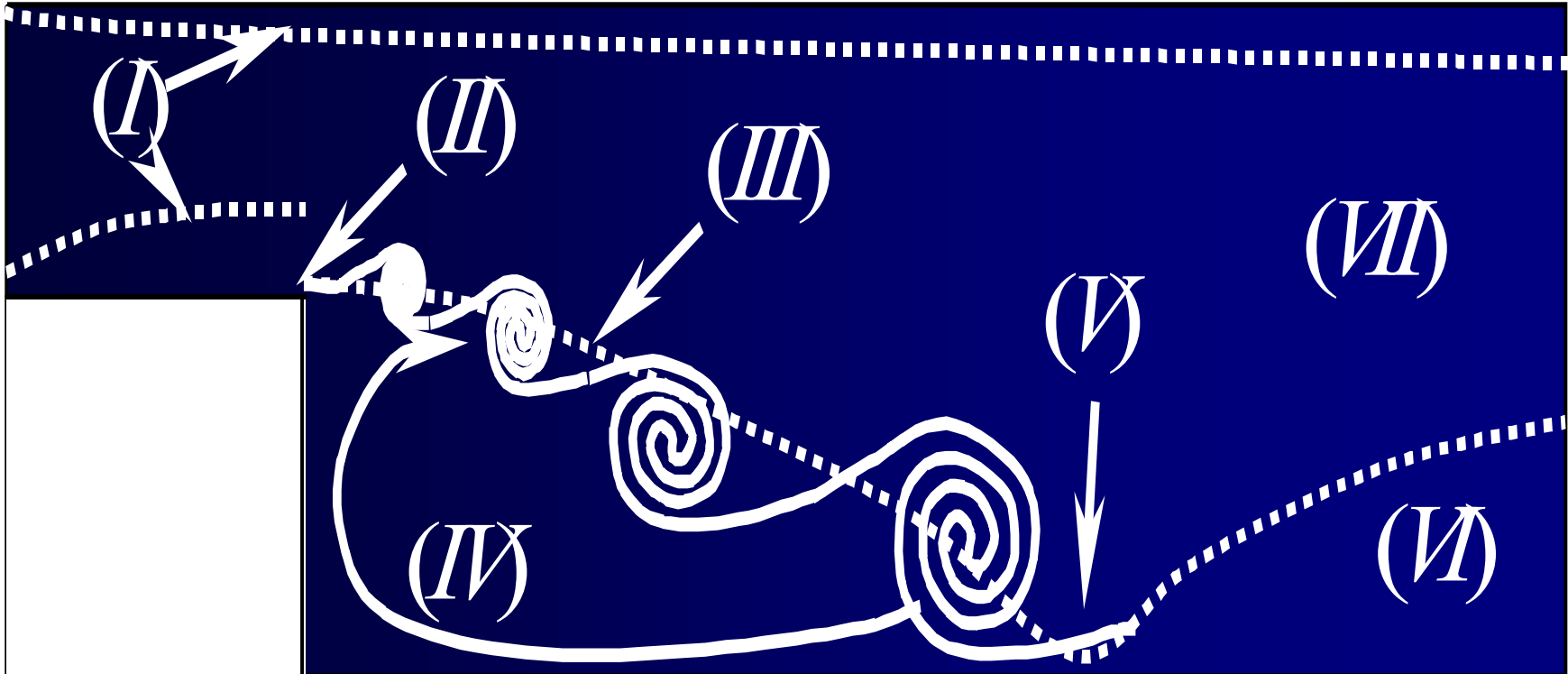
Os escoamentos mais freqüentes, tanto na natureza quanto em aplicações práticas, são os escoamentos complexos que podem ser vistos como combinações dos escoamentos de base.

Eles são uma composição de jatos, esteiras, camadas de mistura, camada limite, descolamento, recolamento, efeitos de rotação, e interações diversas entre estes tipos de base.

Um exemplo acadêmico deste tipo de escoamento é o caso da expansão brusca de um canal retangular.

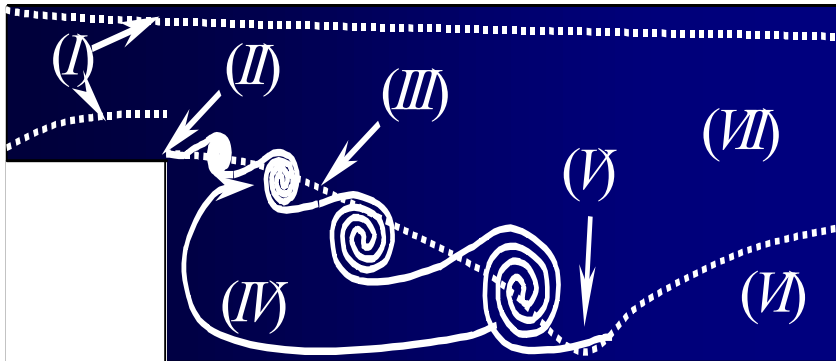
Escoamentos Complexos

O escoamento complexo que se dá sobre uma expansão brusca, como ocorre no escoamento sobre um degrau, é um exemplo acadêmico de escoamento complexo.



Escoamentos complexos

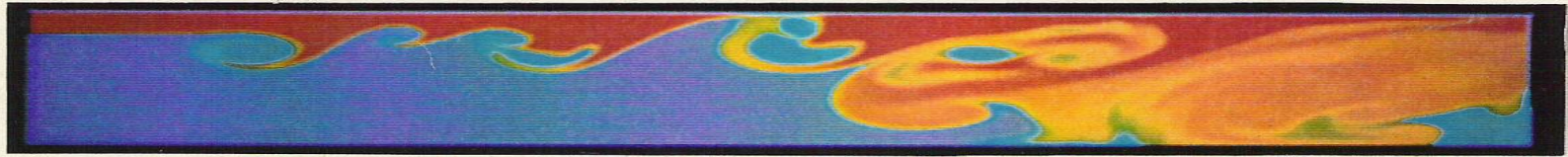
Detalhamento do escoamento sobre expansão brusca.



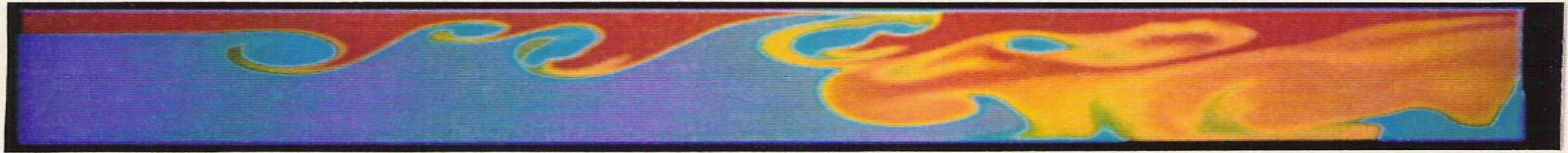
- I. Escoamento tipo camada limite sobre o degrau.
- II. Descolamento de camada limite com surgimento de uma zona cisalhante.
- III. Formação de instabilidades do tipo Kelvin-Helmholtz que são transportadas para uma região de recolamento da camada limite.
- IV. Zona de recirculação.
- V. Ponto de choque das estruturas turbilhonares com a parede inferior.
- VI. Zona de redesenvolvimento da camada limite.
- VII. Região de escoamento mais estável que não pode ser considerada zona de escoamento potencial pela injeção de instabilidades intermitentes em seu interior.

Escoamentos Complexos

Resultado de simulação bidimensional.



(a) $t=102 H/U_0$



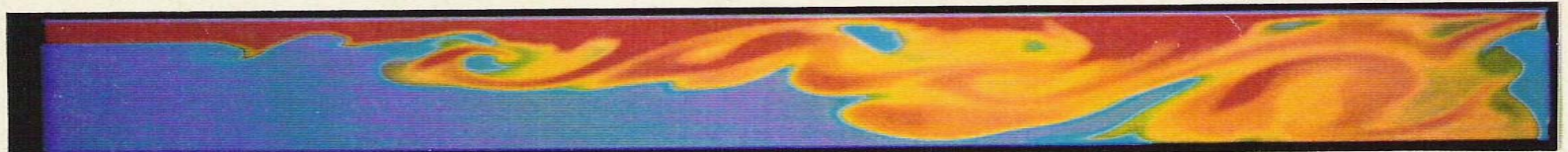
(b) $t=104 H/U_0$



(c) $t=106 H/U_0$



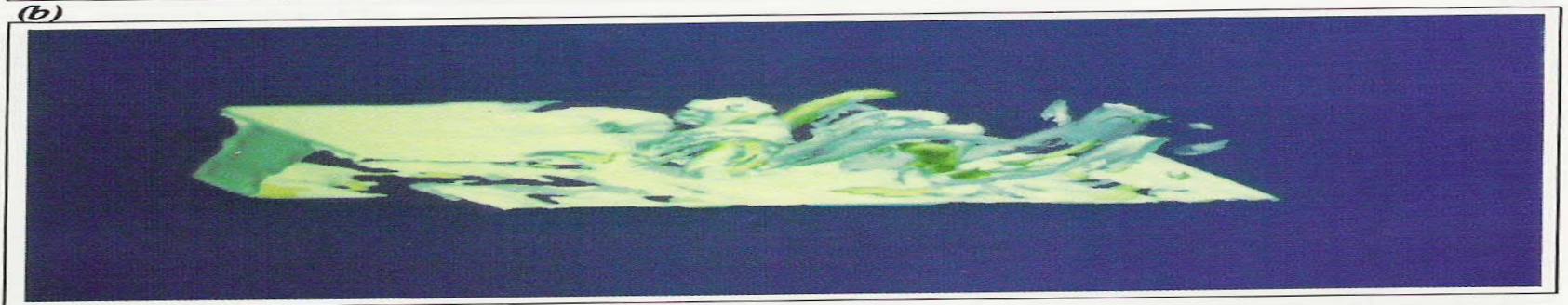
(d) $t=108 H/U_0$



(e) $t=110 H/U_0$

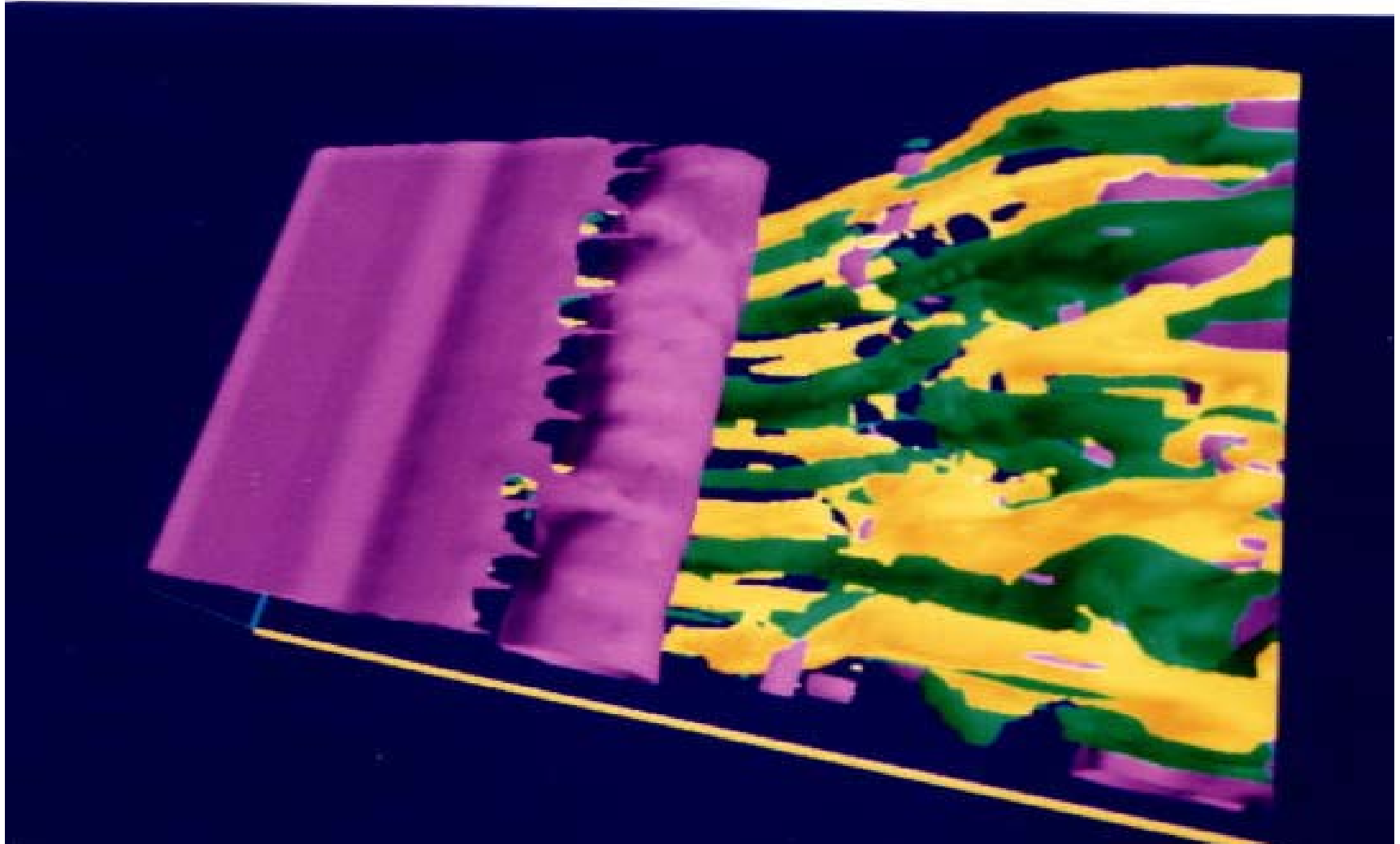
Escoamentos Complexos

Resultado de simulação tridimensional.



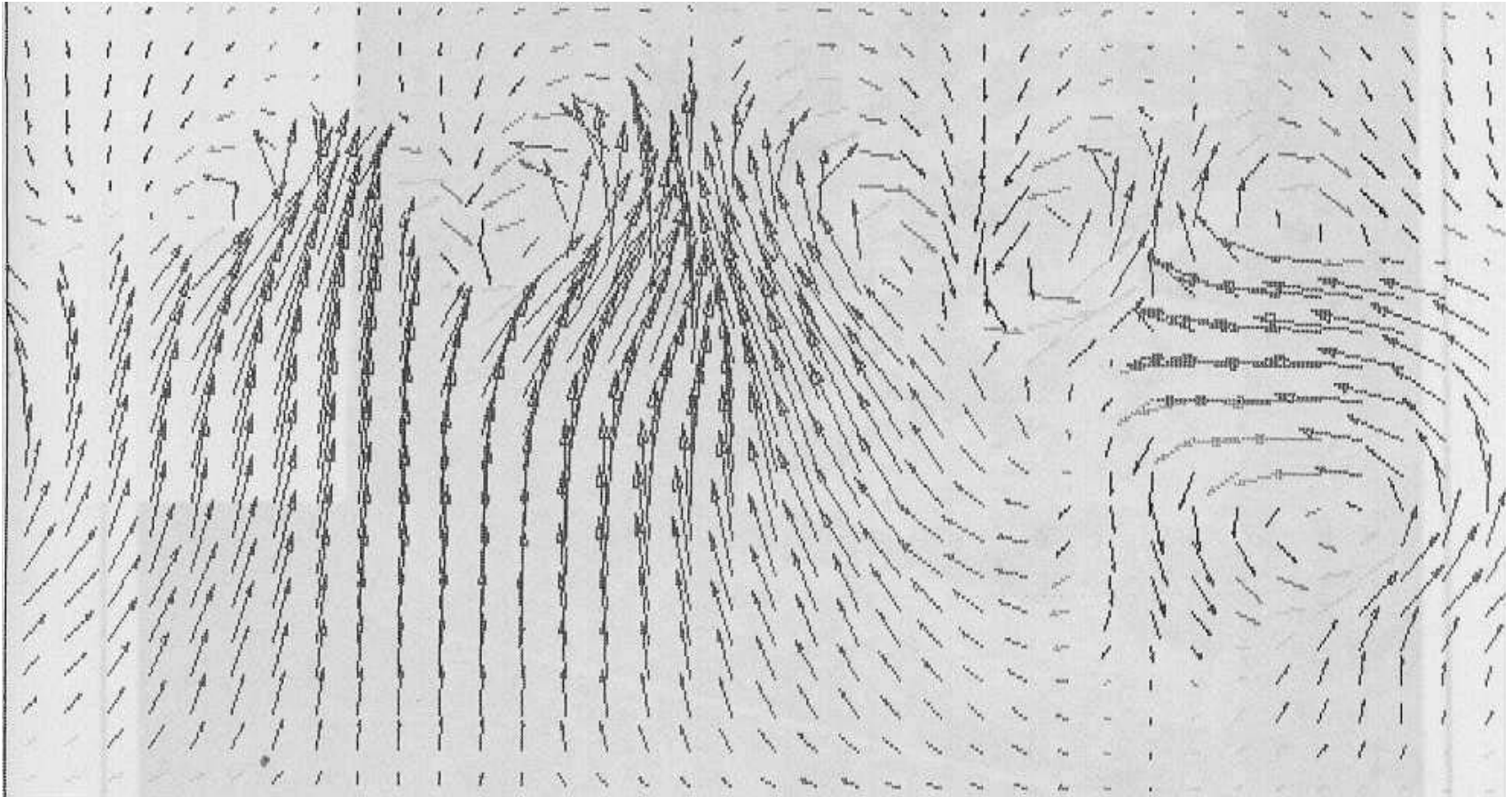
Escoamentos Complexos

Vista superior da simulação 3D visualizando escoamento logo após expansão brusca



Escoamentos Complexos

Corte vertical sobre turbilhões longitudinais, plotagem de vetores para demonstração do campo de velocidade.



Métodos de Estudo da Turbulência

1. Métodos Experimentais

2. Métodos Teóricos

Métodos de Estudo da Turbulência

- anemometria a fio quente

- anemometria a filme quente

Métodos Experimentais:

- anemometria a laser

- anemometria por imagens rápidas

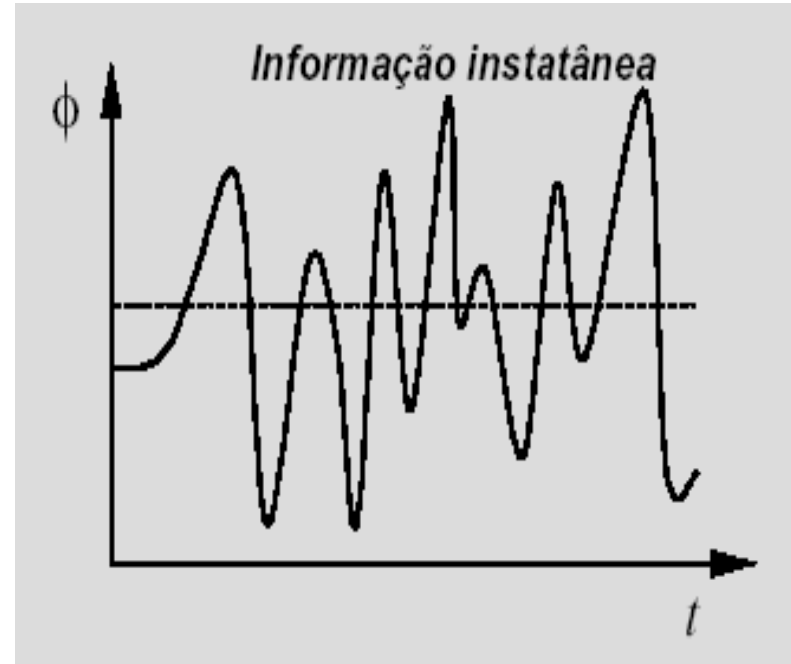
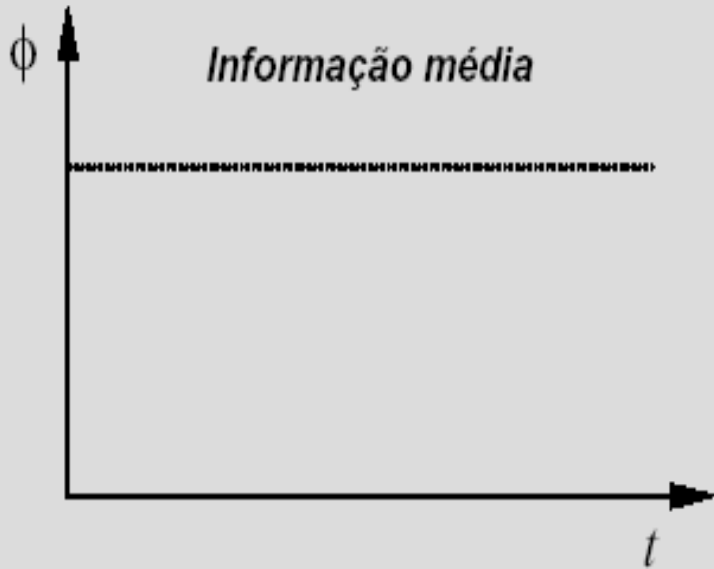
Métodos de Estudo da Turbulência

- Modelos Clássicos

Métodos Teóricos

- Modelos Contemporâneos

Métodos de Estudo da Turbulência



Informação obtida utilizando-se:

À esquerda: **Modelagem Clássica da Turbulência**

À direita: **Modelagem Contemporânea da Turbulência**

A Modelagem clássica não consegue captar detalhes do escoamento turbulento.

Modelagem da Turbulência

As equações do Movimento para um Escoamento Turbulento.

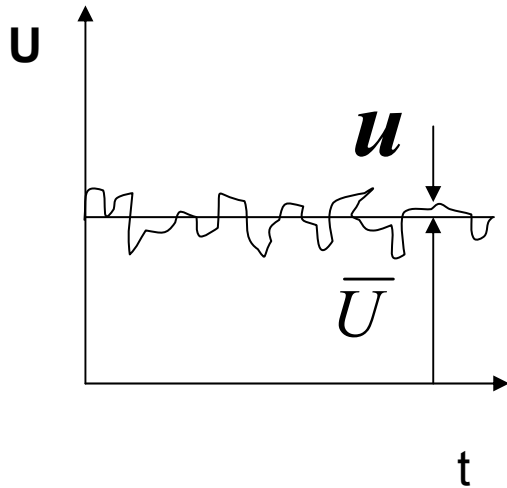
O Tensor de Reynolds.



Modelagem da Turbulência

O Conceito de Média de Reynolds

Num escoamento turbulento qualquer parâmetro instantâneo é dado pela soma de um valor médio e uma flutuação. Para velocidade:



$$U = \bar{U} + u$$

Valor instantâneo: U

Valor médio: \bar{U}

Flutuação: u

Obs: o valor médio de uma flutuação é zero: $\bar{u} = 0$

Modelagem da Turbulência

Objetivo: deduzir as equações do movimento para um escoamento turbulento de acordo com o procedimento clássico de Reynolds (1895).

Média temporal para turbulência estacionária: $\bar{U}^t(x_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U(x_0, t) dt$

Média espacial para turbulência homogênea: $\bar{U}^s(t_0) = \lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X}^X U(x, t_0) dx$

Média sobre um grande número de experimentos: $\bar{U}^e(x_0, t_0) = \frac{\sum_1^N U_n(x_0, t_0)}{N} = \int_{-\infty}^{+\infty} U f(U) dU$

Modelagem da Turbulência

Hipótese Ergótica:

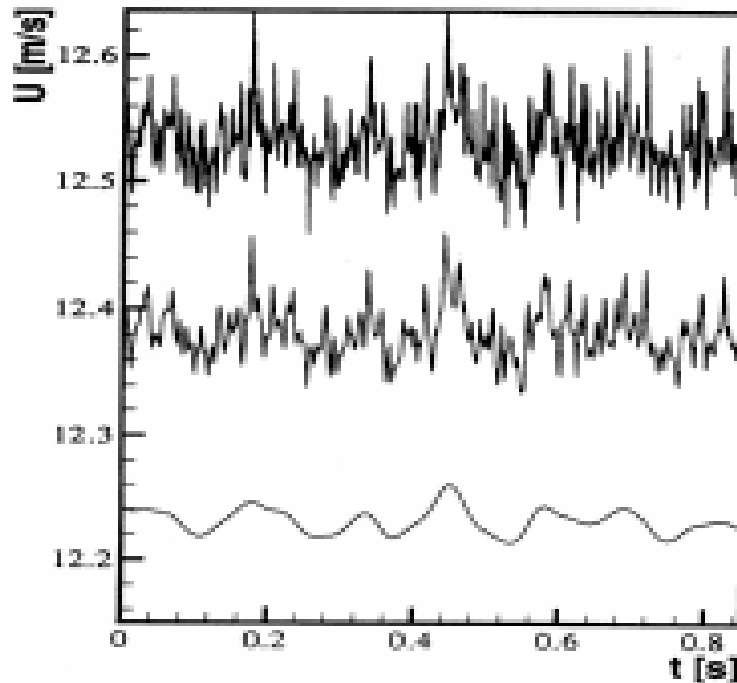
Para turbulência estacionária e homogênea espera-se que os três processos de passagem de média levem ao mesmo resultado:

$$\bar{U}^t(\mathbf{x}_0) = \bar{U}^s(t_0) = \bar{U}^e(\mathbf{x}_0, t_0)$$

Na prática, contudo, a turbulência não é estacionária nem tão pouco homogênea e os intervalos de tempo escolhidos para cálculo de médias não podem ser infinitos por motivos práticos.

Modelagem da Turbulência

Escolha de um intervalo de tempo para cálculo de médias.



Flutuações no escoamento como medidas por um anemômetro de fio-quente (Menut, 1998).

Modelagem da Turbulência

As Equações de Movimento.

Propriedades do Operador de Média.

$$1. \overline{\overline{A}} = \overline{A}$$

$$2. \overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$3. \overline{\overline{AB}} = \overline{\overline{A} \overline{B}}, \overline{AB} = \overline{\overline{A} \overline{B}} + \overline{ab}$$

$$4. \overline{\left(\frac{dA}{ds} \right)} = \frac{d\overline{A}}{ds}$$

$$5. \overline{\int A ds} = \int \overline{A} ds$$

Modelagem da Turbulência

As equações de movimento.

$$1. \overline{A} = \overline{\overline{A} + a} = \overline{\overline{A}} + \overline{a} = \overline{A} + \overline{a} \rightarrow \overline{a} = 0$$

$$2. \overline{\overline{A} \overline{B}} = \overline{\overline{A} \overline{B}} = \overline{A} \overline{B}$$

$$3. \overline{\overline{A} b} = \overline{\overline{A} \overline{b}} = \overline{A} \overline{b} = 0 \rightarrow \overline{b} = 0$$

$$4. \overline{\overline{B} a} = \overline{\overline{B} \overline{a}} = \overline{B} \overline{a} = 0 \rightarrow \overline{a} = 0$$

$$\begin{aligned} 5. \overline{AB} &= \overline{(\overline{A} + a) (\overline{B} + b)} = \overline{\overline{A} \overline{B} + a \overline{B} + \overline{A} b + ab} = \overline{\overline{A} \overline{B}} + \overline{a \overline{B}} + \overline{\overline{A} b} + \overline{ab} = \overline{\overline{A} \overline{B}} + \overline{a} \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{A} b} + \overline{ab} = \\ &= \overline{\overline{A} \overline{B}} + \overline{a} \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{A} b} + \overline{ab} = \overline{AB} + \overline{ab} \rightarrow \overline{a} = \overline{b} = 0 \end{aligned}$$

Modelagem da Turbulência

As Equações de Movimento.

As **Equações de Reynolds** são um conjunto de equações para as quantidades médias do escoamento, e elas podem ser obtidas diretamente das equações de Navier-Stokes pela aplicação do operador Média Temporal.

A obtenção das equações de Reynolds consiste de dois passos básicos:

1. As variáveis que aparecem nas equações de movimento são decompostas na soma de suas partes médias com suas partes flutuantes.
2. É aplicado o operador de média temporal aos termos resultantes sobre um intervalo finito de tempo.

Modelagem da Turbulência

Equações de movimento.

As grandezas físicas que caracterizam o campo de um escoamento são a velocidade, a massa específica, a pressão e a temperatura. Essas grandezas podem ser decompostas na soma de seus de suas componentes médias e flutuantes como segue:

$$1. U_i = \overline{U}_i + u_i$$

$$2. P = \overline{P} + p$$

$$3. \rho = \overline{\rho} + \tilde{\rho}$$

$$4. T = \overline{T} + t$$

Modelagem da Turbulência

Equações de Movimento - Continuidade

A equação da continuidade para um escoamento incompressível pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_i}{\partial x_j} = 0$$

Aplicando-se a esta equação o procedimento de média de Reynolds, obtêm-se:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{U}_j + \overline{\tilde{\rho} u_j}) = 0$$

Modelagem da Turbulência

Equações de Movimento: Quantidade de movimento.

A equação da conservação da quantidade de movimento para um escoamento compressível é dada por:

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j U_i) = \rho f + \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j}$$

Aplicando-se a esta equação o conceito de média de Reynolds, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = \bar{\rho} f - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} \right) + \\ - \left[\overline{\tilde{\rho} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}} + \bar{\rho} \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \bar{U}_j \overline{\tilde{\rho} \frac{\partial u}{\partial x_j}} + \overline{\tilde{\rho} u_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}} + \overline{\tilde{\rho} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \right] \end{aligned}$$

Modelagem da turbulência

O Tensor de Reynolds

$$\tau_{ji} = \overline{u_i u_j} = -\rho \begin{bmatrix} \overline{u^2} & \overline{uv} & \overline{uw} \\ \overline{vu} & \overline{v^2} & \overline{vw} \\ \overline{wu} & \overline{wv} & \overline{w^2} \end{bmatrix}$$

Modelagem da Turbulência

O tensor de Reynolds resulta do procedimento de tomada da média no tempo que faz surgir as correlações envolvendo flutuações de velocidade que são as componentes deste tensor e que representam tensões turbulentas.

Os elementos da diagonal principal do tensor de Reynolds representam componentes de tensão normal, e os demais termos, tensões de cisalhamento. Essas tensões são somadas ao termo viscoso das equações de Navier-Stokes e tem influência semelhante sobre o escoamento.

Modelagem da Turbulência

Modelagem do Tensor de Reynolds

Do procedimento da passagem de média, o único termo relativo à turbulência que permanece é o tensor de Reynolds, $\overline{u_i u_j}$, que é um termo desconhecido que deve ser modelado.

O método escolhido para tal modelagem deve equacionar este tensor de maneira a prever de forma adequada o maior número possível de situações de escoamento.

Há duas metodologias básicas para essa modelagem:

1. utilizando-se o conceito de viscosidade turbulenta.
2. introduzindo-se equações de transporte para o tensor de Reynolds.

Modelagem da Turbulência

Modelagem do Tensor de Reynolds usando a Viscosidade Turbulenta



Joseph Boussinesq

Viscosidade Turbulenta

Boussinesq, em 1877, propôs que os processos de transferência de quantidade de movimento molecular e turbulento se dão de maneira análoga.

A tensão turbulenta estaria relacionada ao gradiente local de velocidades através de uma viscosidade associada às características do fluido, às características do escoamento e à geometria do problema:

$$\tau_t = \mu_t \frac{d\bar{U}}{dy}$$

$\tau_t \rightarrow$ *Tensão Turbulenta*

$\mu_t \rightarrow$ *Visc Turbulenta*

$d\bar{U}/dy \rightarrow$ *Gradiente de Velocidade Média*

Assim, a viscosidade turbulenta deveria embutir em sua definição parâmetros que bem caracterizassem a turbulência através da representação do fluido, do escoamento médio e da geometria envolvida.

Modelagem da Turbulência

Modelagem do tensor de Reynolds usando o conceito de Viscosidade Turbulenta

Forma Generalizada da Hipótese de Boussinesq

Segundo Komolgorov (1942), o tensor de Reynolds pode ser avaliado conforme a equação seguinte:

$$-\overline{u_i u_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k$$

Onde:

$\delta_{ij} \rightarrow$ é o delta de Kronecker

$k \rightarrow$ é a energia cinética das flutuações de velocidade

$\mu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \rightarrow$ representa tensões cisalhantes de Reynolds

$-\frac{2}{3} \delta_{ij} k \rightarrow$ representa tensões normais de Reynolds

Modelagem da Turbulência

Modelagem do Tensor de Reynolds usando o conceito de Viscosidade Turbulenta

Forma Generalizada da Hipótese de Boussinesq

A equação de conservação de Q. M. de Reynolds para escoamento incompressível é dada por:

$$\rho \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \rho \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = \rho f - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} - \rho \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j}$$

Levando a esta equação a hipótese generalizada de Boussinesq:

$$\rho \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \rho \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = \rho f - \frac{\partial (\bar{P} + 3/2 k)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

Modelagem da Turbulência

Modelagem do Tensor de Reynolds usando o Conceito de Viscosidade Turbulenta

Os modelos seguintes são exemplos de modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta:

1. Modelo Algébrico do Comprimento de Mistura

2. Modelo a uma Equação

3. Modelo a Duas Equações {
Modelo $K - \epsilon$
Modelo $K - \epsilon$ RNG

Modelagem da Turbulência

Modelagem do Tensor de Reynolds usando o conceito de Viscosidade Turbulenta

O Modelo K – ε

O modelo K- ε é um modelo a duas equações baseado no conceito de viscosidade turbulenta.

A viscosidade turbulenta que é introduzida no escoamento é um termo desconhecido que precisa ser modelado matematicamente. Essa viscosidade pode ser escrita como uma função de K e de ε , respectivamente, energia cinética turbulenta e dissipação viscosa da energia cinética turbulenta.

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Onde c_μ é uma constante e, k e ε são calculados através de equações de transporte.

Modelagem da Turbulência

Modelagem do Tensor de Reynolds usando o conceito de Viscosidade Turbulenta

Equações do Modelo $k - \varepsilon$

- *Vis. Cinemática Turbulenta :*

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

- *Energia Cinética Turbulenta :*

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{U_j k}) = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \varepsilon$$

- *Taxa de Dissipação Viscosa Específica :*

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{U_j \varepsilon}) = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right]$$

- *Fechamento :*

$$C_{\varepsilon 1} = 1,44 \quad C_{\varepsilon 2} = 1,92 \quad C_\mu = 0,09 \quad \sigma_k = 1,0 \quad \sigma_\varepsilon = 1,3$$

Modelagem da Turbulência

Modelagem do Tensor de Reynolds usando o conceito de Viscosidade Turbulenta

Modelo K – ε RNG

Este modelo tem exatamente a mesma formulação do Modelo k – ε

A menos do cálculo da constante $C_{\varepsilon 2}$ que deixa de ser uma constante e passa a ser uma função da taxa de deformação média:

$$C_{\varepsilon 2} = \tilde{C}_{\varepsilon 2} + \frac{C_{\mu} \lambda^3 (1 - \lambda/\lambda_0)}{1 + \beta \lambda^3}$$

O restante do fechamento fica:

$$C_{\varepsilon 1} = 1,42 \quad \tilde{C}_{\varepsilon 2} = 1,68 \quad C_{\mu} = 0,085 \quad \sigma_k = 0,72 \quad \sigma_{\varepsilon} = 0,72$$

$$\beta = 0,012 \quad \lambda_0 = 4,38 \quad \lambda = \frac{k}{\varepsilon} \left(2 S_{ij} S_{ij} \right)$$

Modelagem da Turbulência

Modelagem do Tensor de Reynolds - Equação de Transporte para os Elementos do Tensor de Reynolds

Pode-se usar a própria equação de Navier-Stokes para se obter equações de transporte que descrevam o comportamento dos elementos do Tensor de Reynolds.

Este procedimento se faz em quatro passos:

1. Multiplica-se a equação do movimento médio por u_j .
2. Aplica-se o operador de média na equação obtida do passo 1.
3. Soma-se a esta equação uma outra idêntica a ela, mas com os índices “i” e “j” trocados.
4. À equação resultante leva-se a equação da continuidade.

Modelagem da Turbulência

Modelagem do Tensor de Reynolds – Equação de Transporte para os elementos do tensor de Reynolds.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = & - \left(\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} \right) + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_i u_j u_k} + \frac{p u_j}{\rho} \delta_{ik} + \frac{p u_i}{\rho} \delta_{jk} - \nu \overline{\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k}} - \nu u_j \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_i}} - \nu u_i \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_j}} \right) + \\
 & - \left[2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} - \left(\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}} + \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Modelagem da Turbulência

Modelagem do Tensor de Reynolds – Equação de Transporte para os elementos do Tensor de Reynolds

A equação de transporte para os elementos do tensor de Reynolds pode ser reescrita como:

$$\frac{D}{Dt} \overline{u_i u_j} = P_{ij} + \phi_{ij} + D_{ij} - \varepsilon_{ij}$$

Modelagem da Turbulência

Modelagem do Tensor de Reynolds – Equação de Transporte para os elementos do Tensor de Reynolds

Onde:

- $\frac{D}{Dt} \overline{u_i u_j} = \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \rightarrow$ *representa a taxa de variação local e o transporte conectivo de $\overline{u_i u_j}$*

- $P_{ij} = - \left(\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} \right) \rightarrow$ *taxa de criação de $\overline{u_i u_j}$ pela ação do escoamento médio*

- $\phi_{ij} = \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \rightarrow$ *Re distribuição de Energia entre os componentes de Tensão Normal*

- $D_{ij} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_i u_j u_k} + \frac{\overline{p u_j}}{\rho} \delta_{ik} + \frac{\overline{p u_i}}{\rho} \delta_{jk} - \overline{v} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} - \overline{v u_j} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_i} - \overline{v u_i} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} \right)$

↓

Re distribuição espacial da tensão turbulenta por efeito difusivo

- $\epsilon_{ij} = - \left[2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \left(\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}} + \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} \right) \right] \rightarrow$ *destruição de $\overline{u_i u_j}$ por efeitos viscosos*

Modelagem da Turbulência

Modelagem do Tensor de Reynolds – Equação de Transporte para os Elementos do Tensor de Reynolds

Os termos P_{ij} e ε_{ij} se contrabalançam. Toda energia retirada do escoamento médio pelo campo turbulento, será destruída pelo termo ε_{ij} , impedindo que a turbulência cresça de forma ilimitada.

Os termos Φ_{ij} , D_{ij} e ε_{ij} devem ser modelados. Essa modelagem deve seguir a certos critérios como garantir que o caráter matemático do modelo seja fiel ao caráter matemático das equações que o originaram.

A modelagem dos termos Φ_{ij} , D_{ij} e ε_{ij} ; pode ser simplificada pelo uso de duas hipóteses chamadas “Hipóteses de Altos Números de Reynolds”, segundo as quais:

1. As grandes escalas são as reais responsáveis pelo transporte de Q. M. e pelo transporte de escalares. Essas grandes escalas não são afetadas pela viscosidade do fluido.
2. As menores escalas são as responsáveis pela dissipação viscosa de energia. Estas menores escalas não tomam conhecimento do escoamento médio.

Modelagem da Turbulência

Modelagem do Tensor de Reynolds – Equação de transporte para os elementos do Tensor de Reynolds

Pode-se deduzir uma equação para a energia cinética turbulenta, k , diretamente da equação de transporte dos elementos do tensor de Reynolds:

Onde :

$$k \left(= \overline{u_i u_i} / 2 \right)$$

Fazendo-se: • $i = j$

$$\bullet k' = (u^2 + v^2 + w^2) / 2$$

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = -\rho \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \overline{k' u_j} + \overline{p u_j} \right) + \mu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j} - \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2$$

Referências Bibliográficas

- Jones, W. P., Launder, B. E. **The prediction of laminarization with a two - equation model of turbulence.** Int. J. Heat Mass Transfer, v. 15, 1972, p. 301.
- Jones, W. P., Launder, B. E. **The calculation of low-Reynolds –number phenomena with a two-equation model of turbulence.** Int. J. Heat Mass Transfer, v.16, 1973, p.1119-1130.
- Launder, B. E., Spalding, D.B. **The numerical computation of turbulent flows.** Comp. Meths. Appl. Mech. Engng. V. 3, 1974, p. 269-289.
- Deschamps, C. J., **Modelos Algébricos e Diferenciais**, em Turbulência, eds.A. P. Silva-Freire, P. P. M. Menut e J. Su, ABCM – Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Br, 2002.

Referências Bibliográficas

Silva-Freire, A. P., Cruz, D. O. A., **Equações do Movimento e Resultados Assintóticos Aplicados à Teoria de Camada Limite**, em Turbulência, eds. A. P. Silva-Freire, P. P. M. Menut e J. Su, ABCM – Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Br, 2002.

Silveira-Neto, A., **Fundamentos da Turbulência nos Fluidos**, em Turbulência, eds. A. P. Silva-Freire, P. P. M. Menut e J. Su, ABCM – Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Br, 2002.

Silveira-Neto, A. **Turbulência nos Fluidos Aplicada**. Curso Turbulência-Palestra. São Paulo, 2006.

Tennekes, H., Lumley, J. L. **A first course in turbulence**. MIT Press, 1999, 300 p.